5 Unterrichtseinheiten

5.1 Einführung in die Laplace-Wahrscheinlichkeit

LEHRPLANBEZUG

a) **inhaltsbezogen**

L5: Daten und Zufall

- Zufällige Erscheinungen erkennen und beschreiben
- Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen schätzen
- Wahrscheinlichkeiten bei zufälligen Erscheinungen berechnen bzw. deuten

b) **kompetenzbezogen**

K1: Mathematisch argumentieren

- Mathematische Argumentationen entwickeln

K2: Probleme mathematisch lösen

- Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten

K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Die Schülerinnen und Schüler können Anteile als Brüche (relative Häufigkeit) und Prozentsätze darstellen und der Größe nach ordnen.

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Problemstellung

Leonie, Philipp, Mareike, Kevin spielen Mensch-ärgere-dich-nicht. Kevin hat gewonnen, Mareike ärgert sich und sagt: „Du hast nur gewonnen, weil du viel mehr 6er gewürfelt hast."

Was meint ihr dazu?

Die Schüler vermuten unter anderem, dass die Chance (Wahrscheinlichkeit), eine bestimmte Augenzahl zu würfeln, $\frac{1}{6}$ ist.

Mit Hilfe des Arbeitsblatt „Ergebnisse beim Würfeln" (Laplace-Wahrscheinlichkeiten) untersuchen die Schülerinnen und Schüler ihre Vermutungen. Im Zusammenhang mit diesem Experiment werden folgende Fachbegriffe eingeführt:

Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis, Wahrscheinlichkeit

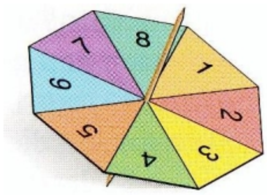
Als Ergebnis kann folgender Merksatz in Form eines sinnvollen Lückentextes formuliert werden:

Bei einem Zufallsexperiment, dessen Ergebnisse die gleiche Chance haben einzutreffen, bezeichnet man den Quotienten

$$\frac{\text{Anzahl der für dieses Ereignis günstigen Augenzahlen}}{\text{Anzahl aller Augenzahlen}}$$

als Wahrscheinlichkeit.

Die nachfolgenden Arbeitsblätter dienen der Übung und Vertiefung des Gelernten. Das ganze Thema sollte sehr spielerisch und mit vielen Beispielen wie Roulette, Karten etc. gestaltet werden.



Wichtig ist, dass die Schüler die Wahrscheinlichkeiten als Näherungswerte von relativen Häufigkeiten bei häufiger Versuchsdurchführung interpretieren können. Dies kann anhand eines Gedankenexperiments unterstützt oder mit einem Computer-Programm veranschaulicht werden. Dabei soll die Vorstellung eines „idealen" Würfels im Unterrichtsgespräch thematisiert werden.

ZEITBEDARF

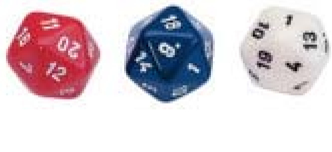
5 Unterrichtsstunden

EINGESETZTE ARBEITSBLÄTTER UND MATERIALIEN

Arbeitsblatt:

1. „Ergebnisse beim Würfeln", „Auf dem Schulfest", „Wer hat die besten Karten", „Glücksräder für Könner"
2. Aufgaben zu Wahrscheinlichkeiten: „Auf dem Schulfest“

„Würfel" wird hier für das Spielgerät benutzt und gilt deshalb auch für andere Körper wie Oktaeder und Dodekaeder, mit denen gewürfelt wird.



Ergebnisse beim Würfeln

6er Würfel

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						
15						
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						
23						
24						
25						
26						
27						
28						
29						
30						
31						
32						
33						
34						
35						
36						
37						
38						
39						
40						
Summe						
Summe						

20er Würfel

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1																				
2																				
3																				
4																				
5																				
6																				
7																				
8																				
9																				
10																				
11																				
12																				
13																				
14																				
15																				
16																				
17																				
18																				
19																				
20																				
21																				
22																				
23																				
24																				
25																				
26																				
27																				
28																				
29																				
30																				
31																				
32																				
33																				
34																				
35																				
36																				
37																				
38																				
39																				
40																				
Summe																				
Summe																				

Auf dem Schulfest

1. Gewinnspiele

Beim Schulfest werden Spiele angeboten, bei denen Preise zu gewinnen sind. Die Klasse 8a hat ein Glücksrad gebaut. Bei diesem Glücksrad gibt es 100 gleich große Felder, auf denen die Zahlen von 1 bis 100 stehen. Es gewinnen alle Zahlen, die durch 11 teilbar sind.

Auch die Klasse 8b hat ein Glücksrad gebaut. Dieses Glücksrad hat 50 gleich große Felder mit den Zahlen von 1 bis 50. Es gewinnen alle Zahlen, die durch 5 teilbar sind.

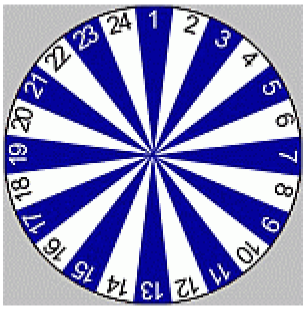
Auf welchem Glücksrad würdest du spielen?

Begründe deine Entscheidung!

2. Glücksräder

Bei dem ersten Glücksrad gewinnen alle Zahlen, die durch 5 teilbar sind und bei dem zweiten alle Zahlen, die durch 4 teilbar sind.

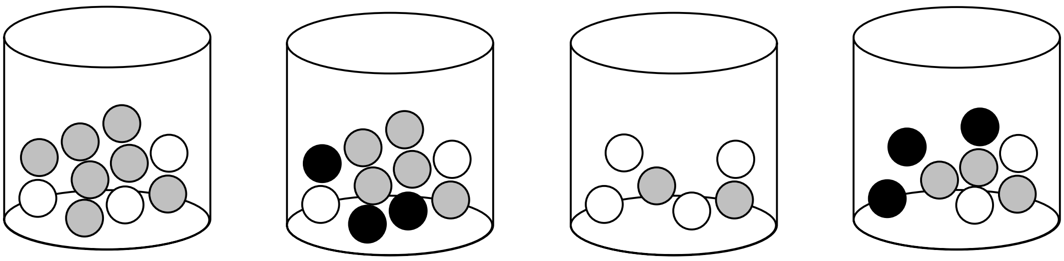
Welches wählst du?



3. Kugeln im Glas (Partnerarbeit)

Spielregel: Zunächst wählst du eines der Gläser aus. Dann werden dir die Augen verbunden und du ziehst eine Kugel. Ziehst du eine weiße Kugel, gibt es einen Gewinn.

Diskutiere mit deinem Partner, bei welchem Glas du die besten Chancen hast und bei welchem die schlechtesten. Begründe!



Wer hat die besten Karten?

1. Karten ziehen

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischst du beim Ziehen folgende Karten eines Skatblattes?

(Ein Skatblatt besteht aus 32 Karten und 4 Farben: Karo (rot), Herz (rot), Pik (schwarz) und Kreuz (schwarz). Pro Farbe gibt es 8 Karten: 7, 8, 9, 10, Bube, Dame, König, Ass)

- Ass: ____
- rote Karte: ____
- Dame oder König: ____
- 9: ____

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt du beim Ziehen folgende Karten bei Uno?

(Uno besteht aus Karten 1 bis 9 in den Farben rot, grün, blau, gelb je zweimal; die Karte 0 in allen vier Farben je einmal; die Karten +2, Retour und Aussetzen in allen vier Farben je zweimal sowie die Karten +4 und Farbenwahl in schwarz je viermal)

- 9: _____
- Eine rote Karte: _____
- Farbenwahl: _____

2. Jackpot

Wie wahrscheinlich sind folgende Ereignisse?

- Chance: ____
- Jackpot: ____
- 17: ____
- weder 17 noch Jackpot: ____

Glücksräder für Könner

1. Viel Glück

Bestimme die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

rot: ____________________

blau: ____________________

nicht gelb: __________________

gelb oder grün: _____________

2. Zahlenrad

Bestimme die Wahrscheinlichkeiten (Zahlen von 1-36):

Eine durch 2 teilbare Zahl: ____________

Eine Primzahl: ____________

Ein Vielfaches von 3: ____________

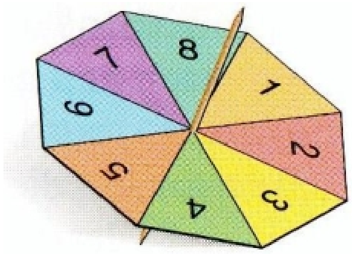
Eine ungerade Zahl: ____________

Eine durch 6 teilbare Zahl: ____________

3. Glücksrad bauen

So ein kleines Glücksrad wie auf dem Bild kannst du dir leicht bauen. Du brauchst nur einen Karton und einen Zahnstocher.

Teste dein Glücksrad.



Lösungen: Bitte auf sinnvolles Runden achten.

Auf dem Schulfest

1.	Glücksräder	8a :	$\frac{9}{100} \approx$ 9 %
		8b:	$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} =$ 10 %
2.	Glücksräder 2		$\frac{7}{36} \approx$ 19 %
			$\frac{6}{24} = \frac{1}{4} =$ 25 %
3.	Kugeln im Glas	Glas 1:	$\frac{3}{10} =$ 30 %
		Glas 2:	$\frac{2}{10} =$ 20 %
		Glas 3:	$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx$ 67 %
		Glas 4:	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4} =$ 25 %

Wer hat die besten Karten

1. Karten ziehen	a)	Ass:	$\frac{4}{32} = \frac{1}{8} =$ 12,5 %
		rote Karte:	$\frac{16}{32} = \frac{1}{2} =$ 50 %
		Dame oder König:	$\frac{8}{32} = \frac{1}{4} =$ 25 %
	b)	Es gibt 108 Uno-Karten:	
		9:	$\frac{8}{108} = \frac{2}{27} \approx$ 7 %
		rote Karte:	$\frac{22}{108} = \frac{11}{54} \approx$ 20 %
		Farbenwahl:	$\frac{4}{108} = \frac{1}{27} \approx$ 3,7 %
2. Glücksrad		Chance:	$\frac{2}{36} = \frac{1}{18} \approx$ 5,6 %
		Jackpot:	$\frac{1}{36} \approx$ 2,8%
		17:	$\frac{1}{36} \approx$ 2,8 %
		kein Gewinn:	$\frac{32}{36} = \frac{8}{9} \approx$ 88, 9 %

Glücksräder für Könner

1. Spiel

rot: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ = 25 %

blau: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ = 25 %

nicht gelb: $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ = 75 %

gelb oder grün: $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ = 50 %

2. Zahlenrad

eine Zahl durch 2 teilbar: $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ = 50 %

eine Primzahl: $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ = 25 %

ein Vielfaches von 3: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3} \approx$ 33,3 %

eine ungerade Zahl: $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ = 50 %

eine Zahl teilbar durch 6: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx$ 16,7 %

3. Glücksrad bauen

5.2 Schätzen von Wahrscheinlichkeiten

Lehrplanbezug

a) **inhaltsbezogen**

L5: Daten und Zufall

- Zufällige Erscheinungen erkennen und beschreiben
- Spiele/einstufige Zufallsexperimente
- Prognosen
- Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen schätzen

b) **kompetenzbezogen**

K2: Probleme mathematisch lösen

- Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten

K4: Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden

K6: Kommunizieren

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien

Unterrichtliche Voraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler können Anteile als Brüche, Dezimalbrüche und Prozentsätze angeben.

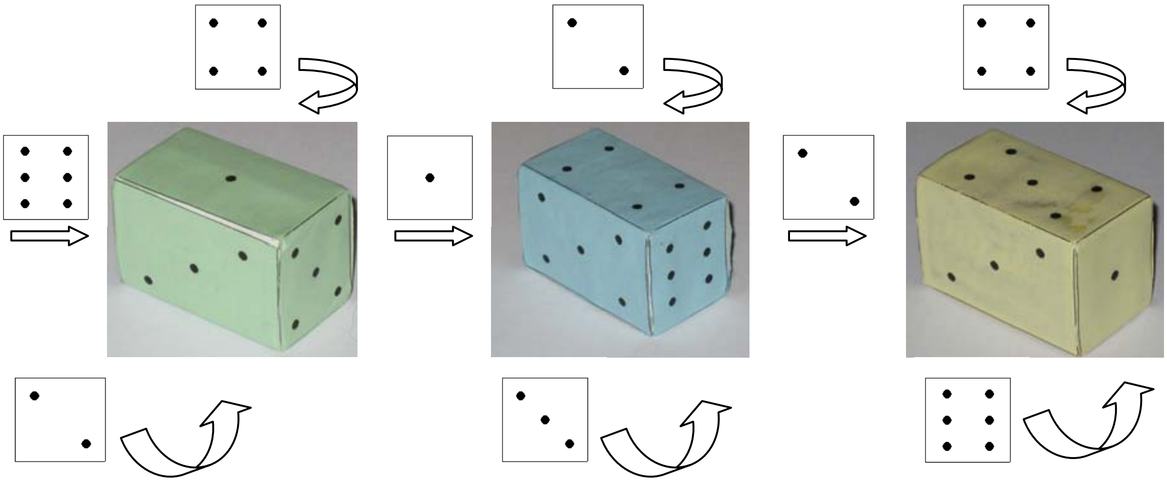
Sie stellen Daten grafisch dar (Einsatz einer Tabellenkalkulation) und nutzen den Taschenrechner sinnvoll.

Hinweise für den Unterricht

Ausgangspunkt dieser Unterrichtseinheit ist das Spiel „Das Rennen", bei dem neben unsymmetrischen Wurfgeräten („Quaderwürfel") auch der ideale, symmetrische Würfel eingesetzt wird. Durch die Verwendung eines „normalen" Würfels kann später bei der Auswertung der Zusammenhang zwischen relativer Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit hergestellt werden. Weiterhin kann damit die Interpretation der relativen Häufigkeit als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit erleichtert werden.

- **Durchführung des Spiels „Das Rennen“**

Das Spiel (vgl. Spielplan auf Seite 56) wird in Dreier- oder Vierergruppen gespielt. Benötigt werden pro Gruppe ein Spielfeld, ein „normaler“ Würfel, drei „Quaderwürfel“ und Spielsteine zum Ziehen.[18] Die Würfel können aus Kanthölzern, quaderförmigen Bauklötzen oder aus zwei leeren aufeinander geklebten Streichholzschachteln hergestellt werden. Auch Legosteine (große Steine von DUPLO) können benutzt werden. Die Augenzahlen werden unterschiedlich auf den Seitenflächen verteilt, so dass sich für jeden Würfel eine eigene (Wahrscheinlichkeits-) Verteilung ergibt. Zur späteren Untersuchung müssen sie unterscheidbar sein. Im Folgenden wird dies durch unterschiedliche Farben erreicht.



Die abgebildeten Würfel wurden aus zwei Streichholzschachteln hergestellt. Die Umwicklung mit farbigem Papier ermöglicht eine Unterscheidung der Würfel.

Die Schülerinnen und Schüler spielen das Spiel einmal. Nach dem Spiel sollen die Schülerinnen und Schüler zunächst ihre Erfahrungen äußern. Dabei können zum einen individuelle Spielstrategien erläutert werden. Zum anderen können in dieser Phase Fachbegriffe wie *Zufallsexperiment, Ergebnis* und *Ergebnismenge* (alle möglichen Ergebnisse) eingeführt und am Beispiel für das Werfen mit den „Quaderwürfeln“ angewendet werden. Der Begriff Wahrscheinlichkeit wird dabei in der Regel zunächst im Sinne der Chance für das Eintreten eines bestimmten Ergebnisses benutzt.

[18] Es können auch als unsymmetrische Wurfgeräte so genannte LUDOS-Würfel verwendet werden. Weitere Informationen und Bezugsmöglichkeiten unter www.mathe.leprax.de/html/ludos.html

- **Erste Untersuchungen der verschiedenen Wurfgeräte**

Um die Frage nach der optimalen Wahl eines bestimmten Würfels beantworten zu können, sind weitere Untersuchungen nötig. Ziel dieser Datenerhebung ist, die relative Häufigkeit als Maß für den Anteil einer bestimmten Augenzahl an der Gesamtzahl der Würfe einzuführen.

Dazu würfelt jede Schülerin bzw. jeder Schüler genau zwei Minuten lang mit einem selbst gewählten Würfel und notiert die erzielten Augenzahlen in einer Tabelle.

Augenzahl	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Anzahl						

Im Unterrichtsgespräch wird erarbeitet, dass sich die Anzahl der gewürfelten Augenzahlen von gleichen Würfeln nicht direkt vergleichen lassen, da die Anzahl der Gesamtwürfe (*absolute Häufigkeit*) jeweils unterschiedlich ist. Es muss zum Vergleich der Anteil der gewürfelten Augenzahlen (*relative Häufigkeit*) herangezogen werden. Dazu werden die gewöhnlichen Brüche auch als Dezimalbruch und Prozentsatz angegeben. Wenn die Begriffe *absolute* und *relative Häufigkeit* noch nicht aus der Orientierungsstufe bekannt sind, können sie an dieser Stelle eingeführt werden.

Zum Abschluss dieser Phase wandeln die Schülerinnen und Schüler für ihre Wurfergebnisse die relativen Häufigkeiten in Dezimalbrüche und Prozentsätze um und vergleichen die Ergebnisse mit denjenigen, die mit dem gleichen Würfel erzielt wurden. Um die Rechnung zu prüfen, wird thematisiert, dass die Summe jeweils 1 bzw. 100 % betragen muss (*Summenregel*).

- **Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten**

Die relativen Häufigkeiten für gleiche Würfel sind bei dieser geringen Zahl von Würfen unterschiedlich. Es wird demnach überlegt, wo nun der genaue Wert liegt. Im Unterrichtsgespräch wird dazu ein Verfahren erarbeitet, das darin besteht, eine größere Anzahl von Würfen zu betrachten. Es wird vermutet, dass im Verlauf größer werdender Anzahlen die relative Häufigkeit zunehmend weniger schwankt. Dazu werden die Gruppen neu eingeteilt, und zwar nach gleichen Wurfgeräten. In diesen relativ großen Gruppen würfelt nun jede Schülerin bzw. jeder Schüler 100 Mal, um insgesamt mindestens 1000 Würfe zu erhalten (vgl. Arbeitsblatt „Untersuchung der relativen Häufigkeit“, Aufgabe 1 auf Seite 57). Eventuell kann das Würfeln auch in die Hausaufgabe verlagert werden.

Anschließend bearbeiten die Gruppen die weiteren Arbeitsaufträge des genannten Arbeitsblatts, wobei hier aufgrund der großen Gruppengröße (7 bis 8 Schülerinnen und Schüler) besondere methodische Anforderungen gestellt werden. Die Berechnung der relativen Häufigkeiten (Summation der absoluten Häufigkeiten) und die grafische Auswertung auf dem Arbeitsblatt sollten ggf. vorab anhand einer Folie besprochen werden.

Mithilfe der von den Gruppen gefertigten Plakate können nun die Werte interpretiert werden (falls keine Plakate erstellt werden, können auch die Graphen auf Folie gezeigt und interpretiert werden). Die Auswertung liefert anschaulich das *Gesetz der großen Zahl*. Im Vergleich zum idealen Würfel wird nun die Wahrscheinlichkeit eines Quaderwürfels als ideale relative Häufigkeit erkannt und mit entsprechenden Toleranzen festgesetzt.

Dies ist für Schülerinnen und Schüler oft ungewöhnlich, sind sie doch in der Mathematik stets genaue Werte gewohnt. Eine etwaige Unzufriedenheit kann abgebaut werden, indem durch ein Gedankenexperiment geklärt wird, wie mit zunehmender Wurfanzahl die Genauigkeit beliebig gesteigert werden kann. Übrigens ist für die Zwecke des Spiels eine „gröbere" Genauigkeit, wie sie sich durch die vorgegebene Wurfzahl ergibt, völlig ausreichend.

Zum Abschluss werden nun von den Gruppen die ermittelten Wahrscheinlichkeitsverteilungen bestimmt (Summe muss 1 bzw. 100 % ergeben) und festgehalten.

- **Nochmaliges Spielen**

Um den praktischen Nutzen zu erleben, wird zum Abschluss dieser Unterrichtssequenz das Spiel nochmals durchgeführt. Nun sollten die Schülerinnen und Schüler die ermittelten Wahrscheinlichkeitswerte für die unterschiedlichen Würfel für eine möglichst schnelle Runde verwenden.

In dieser Unterrichtsreihe werden folgende Fachbegriffe eingeführt:

- Zufallsexperiment, relative Häufigkeit, Wahrscheinlichkeit, Ergebnis und Summenregel

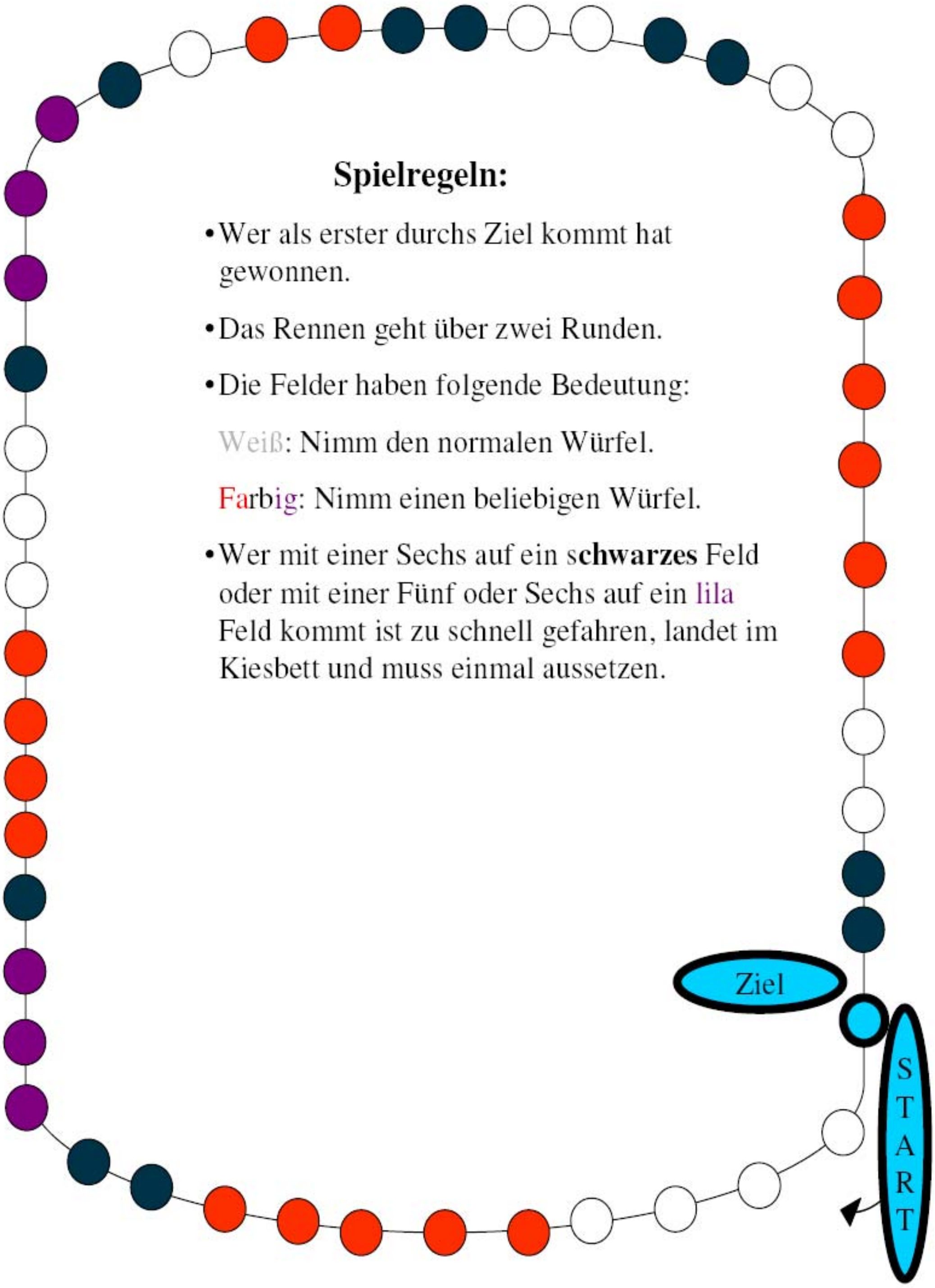
ZEITBEDARF

4-5 Unterrichtsstunden

EINGESETZTE ARBEITSBLÄTTER UND MATERIALIEN

- Spielplan
- Selbstgebastelte Quaderwürfel und ein „normaler" Würfel sowie Spielhütchen
- Arbeitsblätter
- Plakate bzw. Folien zur Präsentation

Das Rennen

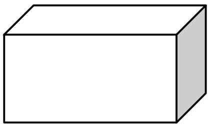


Spielregeln:

- Wer als erster durchs Ziel kommt hat gewonnen.
- Das Rennen geht über zwei Runden.
- Die Felder haben folgende Bedeutung:

  Weiß: Nimm den normalen Würfel.

  Farbig: Nimm einen beliebigen Würfel.
- Wer mit einer Sechs auf ein s**chwarzes** Feld oder mit einer Fünf oder Sechs auf ein lila Feld kommt ist zu schnell gefahren, landet im Kiesbett und muss einmal aussetzen.



Untersuchung der relativen Häufigkeiten

1. **Würfele 100 Mal mit deinem Würfel!**

   Führe in der ersten Tabelle eine Strichliste und berechne die relativen Häufigkeiten.

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Strichliste						
absolute Häufigkeit						
relative Häufigkeit als Dezimalbruch						
Relative Häufigkeit in %						

2. **Übertrage die absoluten Häufigkeiten deiner Gruppenmitglieder in die Gruppentabelle!**

Augenzahl / Würfe	1	2	3	4	5	6
100						
100						
100						
100						
100						
100						
100						
100						
100						
100						

3. Berechne die relativen Häufigkeiten bei steigender Anzahl an Würfen!

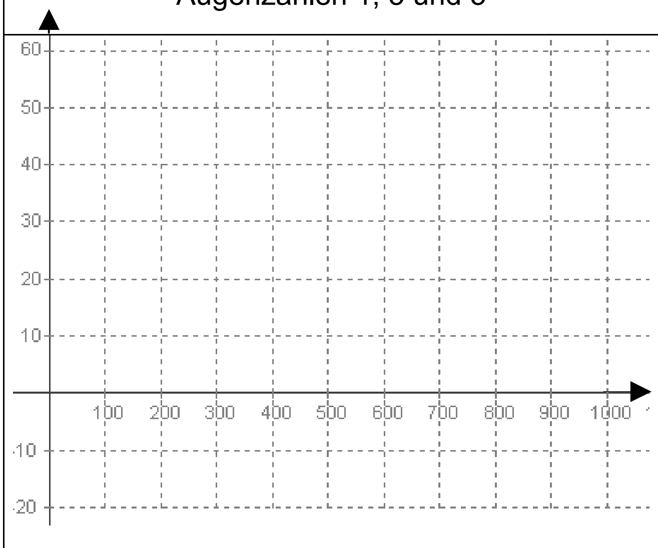
Teilt euch die Rechenarbeit in der Gruppe auf, so dass ihr immer zu zweit die relativen Häufigkeiten für eine Augenzahl berechnet und anschließend eure Ergebnisse in der Gruppe austauscht.

rel. Häufigkeit in % nach ...	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
100 Würfen						
200 Würfen						
300 Würfen						
400 Würfen						
500 Würfen						
600 Würfen						
700 Würfen						
800 Würfen						
900 Würfen						

4. Trage die verschiedenen relativen Häufigkeiten in die Diagramme ein!

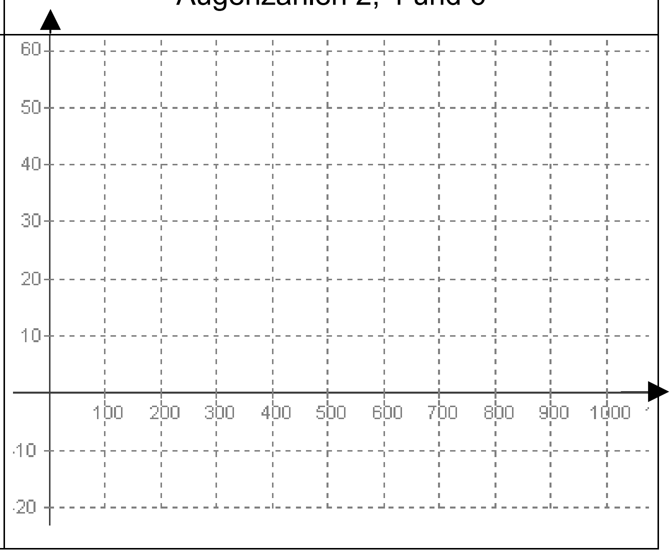
h in %

Relative Häufigkeiten der Augenzahlen 1, 3 und 5



h in %

Relative Häufigkeiten der Augenzahlen 2, 4 und 6

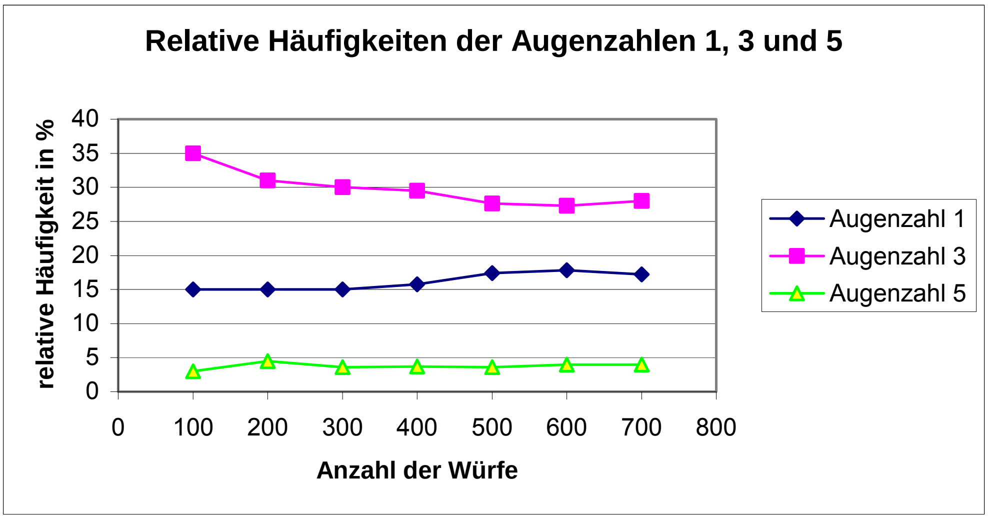


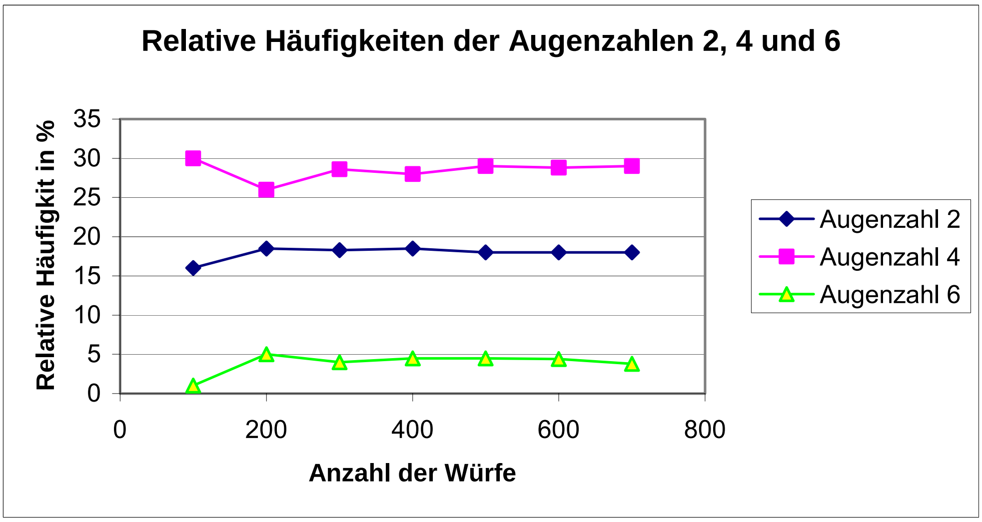
Interpretiert den Graphen!

5. Erstellt in eurer Gruppe ein Plakat mit den Ergebnissen, um der Klasse eure Interpretation vorstellen zu können!

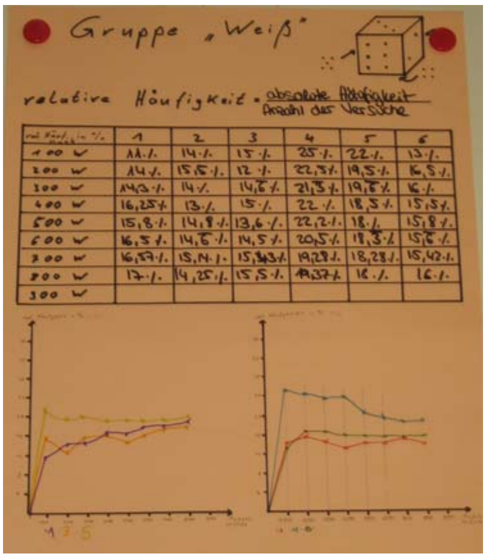
Ergebnisse von Schülerinnen und Schülern

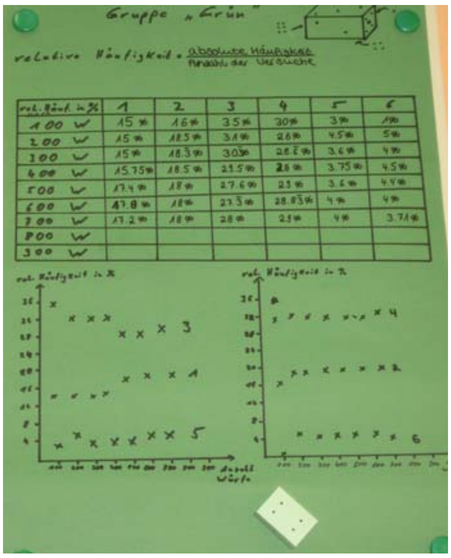
- **Relative Häufigkeiten beim „grünen Quaderwürfel"**





- **Plakate**





6 Bausteine Zufall

6.1 Alles nur Glück?

LEHRPLANBEZUG

a) **inhaltsbezogen**

L5 Daten und Zufall

- Zufällige Erscheinungen erkennen und beschreiben
- Spiele
- Prognosen

b) **kompetenzbezogen**

K2: Probleme mathematisch lösen

- Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten

K4: Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden

K6: Kommunizieren

- Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse dokumentieren, darstellen und präsentieren

K1: Mathematisch argumentieren

- Fragen stellen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und Vermutungen begründet äußern

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

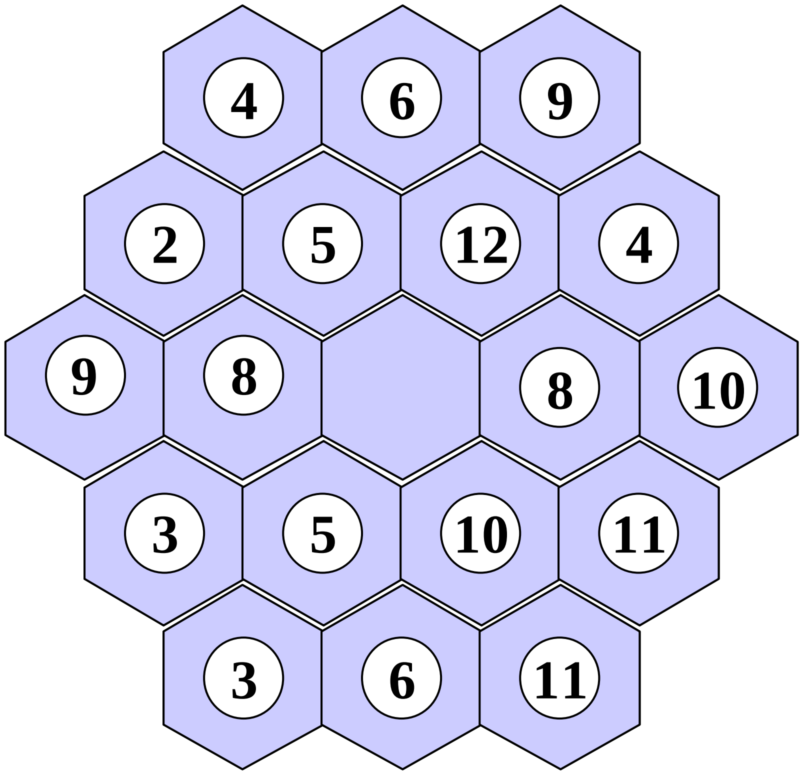
Schülerinnen und Schüler können Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten bestimmen.

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Zur Einführung eines zweistufigen Zufallsexperiments soll das im Folgenden beschriebene Spiel den Schülern als anschauliches Beispiel dienen. Sie sollen dabei erkennen, dass die Zahlen zwischen 2 und 12 nicht gleich verteilt sind.

Es sollte von jeweils vier Schülerinnen und Schülern – jeder erhält drei Spielfiguren – gespielt werden. Das Spielfeld besteht aus 19 gleich großen Waben, von denen jede mit einer Zahl zwischen 2 und 12 (außer der 7) markiert ist. Jeder Schüler setzt seine Spielfiguren auf drei Felder. Nach einem Wurf mit zwei verschiedenfarbigen Würfeln erhalten alle Spieler, deren Spielfiguren auf einem Feld mit der gewürfelten Augensumme stehen, einen Chip oder Ähnliches für dieses Feld. Ziel ist es, am Ende des Spiels möglichst viele Chips zu besitzen. Beim Wurf einer 7 wird ein Chip auf das freie Feld in der Mitte gelegt.

Spielfeld:



Das Spielfeld ist dem Spiel „Siedler von Catan“ nachempfunden. Gegebenenfalls kennen viele Schüler das Original, so dass es im Unterricht bei ausreichender Zeit auch einmal in der echten Version gespielt werden kann.

Nach ca. 15 bis 20 Minuten Spieldauer zählen die Schülerinnen und Schüler die erhaltenen Chips aus. Sie entdecken dabei, dass die Felder unterschiedlich häufig belegt werden. Dies soll im Folgenden weiter untersucht werden.

Die Schülerinnen und Schüler tragen dazu in das vorbereitete Arbeitsblatt („Alles nur Glück“) die möglichen Kombinationen für jede Augensumme ein. Anschließend werden die Ergebnisse auf Vollständigkeit überprüft und die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Augensummen bestimmt.

Sich anschließende Fragen könnten sein:

- Auf welche Felder sollte man seine Spielsteine setzen?
- Hat die Augensumme 7 eine besondere Bedeutung?
- Warum gibt es die 2 und die 12 nur einmal auf dem Spielfeld?

ZEITBEDARF:

2 Unterrichtsstunden

EINGESETZTE MATERIALEN:

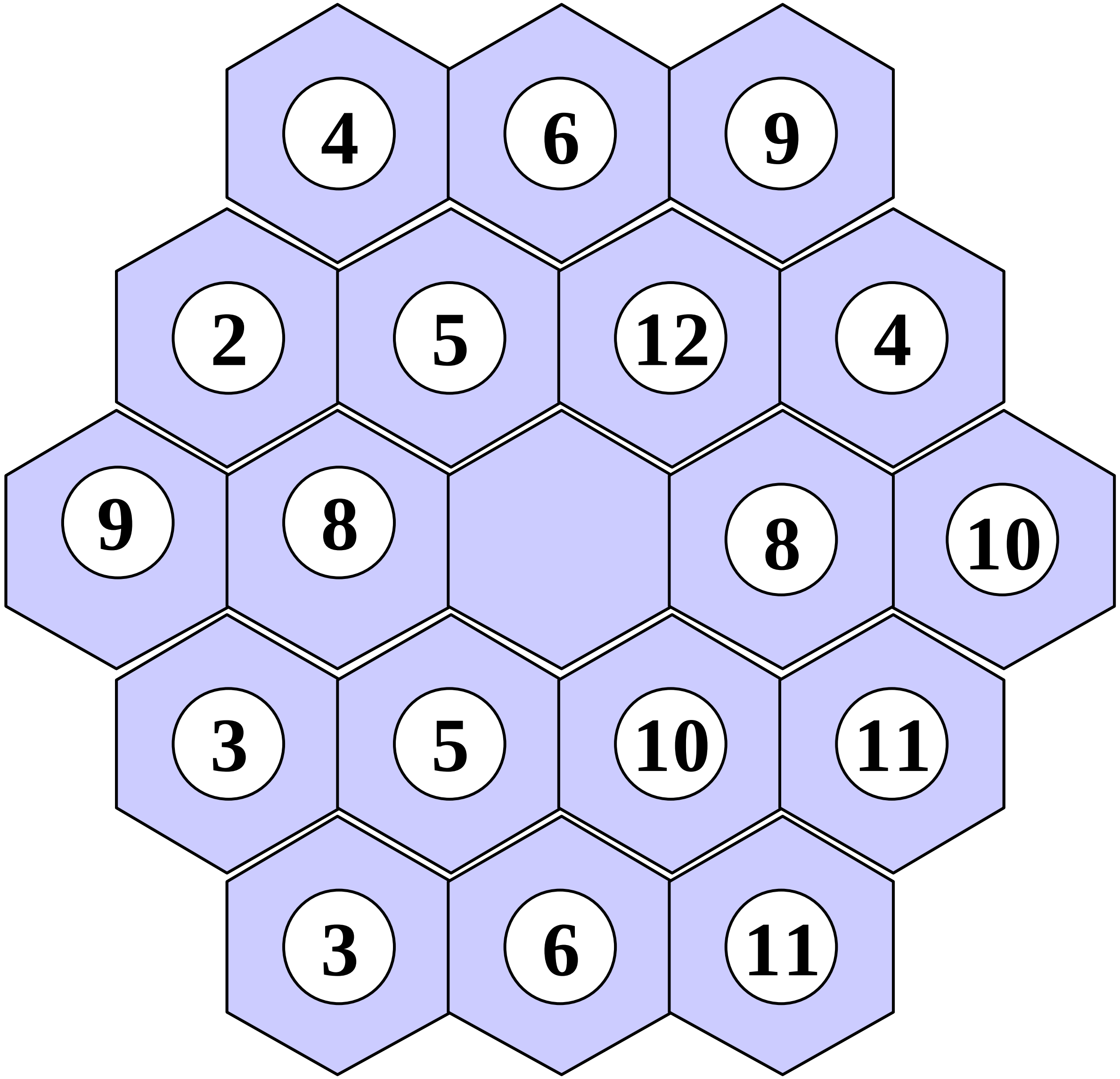
1. Spielplan (es empfiehlt sich, diesen auf DINA3 zu vergrößern)
2. „Alles nur Glück?“ (mit Lösungsblatt)

Alles nur Glück

Augensumme															Wahrscheinlichkeit
2															—
3															—
4															—
5															—
6															—
7															—
8															—
9															—
10															—
11															—
12															—

Schreibt alle möglichen Kombinationen für die Augensummen auf!

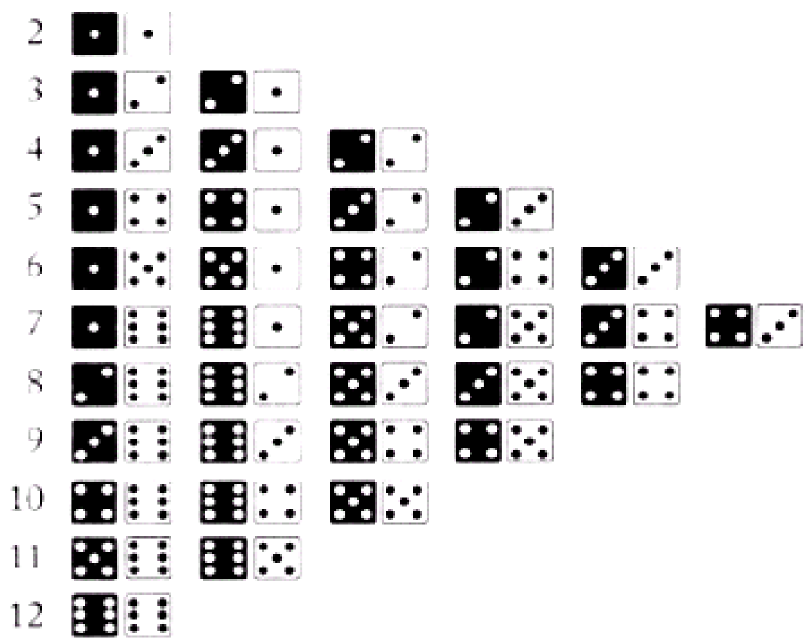
Spielplan



Lösungen

Das Arbeitsblatt „Alles nur Glück“ enthält eine Spalte mehr als erforderlich, um den Schülerinnen und Schülern nicht die maximale Anzahl Kombinationen vorzugeben.

Wurf **Wahrscheinlichkeit**



$\frac{1}{36}$

$\frac{2}{36}$

$\frac{3}{36}$

$\frac{4}{36}$

$\frac{5}{36}$

$\frac{6}{36}$

$\frac{5}{36}$

$\frac{4}{36}$

$\frac{3}{36}$

$\frac{2}{36}$

$\frac{1}{36}$

6.2 Wahrscheinlichkeiten beim Würfeln mit zwei Würfeln

LEHRPLANBEZUG

a) **inhaltsbezogen**

L5 Daten und Zufall

- Zufällige Erscheinungen erkennen und beschreiben
- Einstufige Zufallsexperimente und Prognosen
- Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen schätzen
- Wahrscheinlichkeiten bei zufälligen Erscheinungen berechnen bzw. deuten
- Wahrscheinlichkeiten bei Laplace-Experimenten als Verhältnis der Anzahl der günstigen zu den möglichen Ereignissen
- Fachbegriffe: Zufallsexperiment, Ergebnis, Wahrscheinlichkeit

b) **kompetenzbezogen**

K1: Mathematisch Argumentieren

- Mathematische Argumentationen entwickeln

K2: Probleme mathematisch lösen

- Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten

K6: Kommunizieren

- Fachsprache adressatengerecht verwenden

K3: Mathematisch modellieren

- Ergebnisse in entsprechenden Situationen prüfen

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Die Schülerinnen und Schüler können Anteile als Brüche und Prozentsätze angeben. Sie können Daten grafisch darstellen und haben Grundkenntnisse im Umgang mit einer Tabellenkalkulation.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist den Schülerinnen und Schülern bekannt und sie können Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten bestimmen.

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Problemstellung:

Wir würfeln mit 2 Würfeln und bilden die Augensumme!

Schreibe nun auf einen Haftzettel eine Zahl zwischen 1 und 12, von der du glaubst, dass sie am häufigsten gewürfelt wird. Die Zettel werden an die Tafel geheftet.

Auswertung und erste Vermutungen:

- Eine 1 kann nicht gewürfelt werden.
- Zahlen in der Mitte sind häufiger.
- Bei 2 Würfeln sind große Zahlen häufiger.
- Die 6 ist in der Mitte, also ist 6 die häufigste Zahl.

Die Lehrkraft hält sich dabei mit Kommentaren und Bewertungen zurück.

Gruppen- oder Partnerarbeit:

Würfelt 100-mal und tragt die Augensummen als Strichliste in die Tabelle ein!

Augensumme	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Strichliste											

Die Ergebnisse werden in der Klasse vorgetragen und diskutiert, z. B.:

- Warum ist die relative Häufigkeit der einzelnen Augensummen nicht gleich?
- Schätzen der Wahrscheinlichkeiten (relative Häufigkeit)
- Schätzen der Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 8 auf der Grundlage der Ergebnisse

Kombinationsmöglichkeiten für die verschiedenen Augensummen

Dazu werden von den Schülerinnen und Schülern die Augensummen berechnet und in eine Matrix eingetragen (siehe Arbeitsblatt „Würfelmatrix“).

Mit dieser Tabelle lassen sich die Vermutungen untersuchen und bewerten. Anschließend wird im Unterrichtsgespräch die Wahrscheinlichkeit (als Bruch und Prozentsatz angegeben) für eine Augensumme bestimmt.

Die Schülerinnen und Schüler berechnen die restlichen Wahrscheinlichkeiten und vergleichen diese mit den gewürfelten Ergebnissen (relative Häufigkeiten).

Ergebnis

Man vergleicht dieses Ergebnis mit den zu Beginn der Unterrichtsreihe aufgestellten Vermutungen mit den theoretischen Überlegungen und kommt zu dem Ergebnis, dass bei häufiger Durchführung des Zufallsexperiments sich die relativen Häufigkeiten den Wahrscheinlichkeiten nähern (Gesetz der großen Zahl).

Grafische Darstellungen z. B. als Säulen- oder Balkendiagramm – auch mit einem Tabellenkalkulationsprogramm – und weitere Übungen sollten sich anschließen.

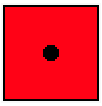
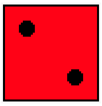
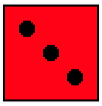
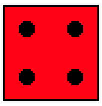
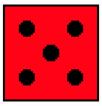
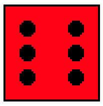
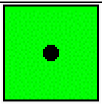
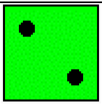
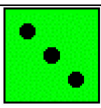
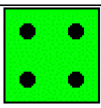
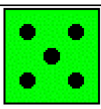
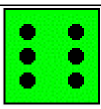
ZEITBEDARF

4 Unterrichtsstunden

EINGESETZTE MATERIALIEN

Vorgefertigte Tabelle zum Eintragen der Ergebnisse der Gruppen-/Partnerarbeit; Würfel, Spielsteine in Form von Tetraeder, Oktaeder (8-Flächner), Dodekaeder (12-Flächner), Ikosaeder (20-Flächner) u. a. in Spielwarenläden erhältlich.

Würfelmatrix – Augensumme

Roter Würfel / Grüner Würfel						
	1+1=2	3	4	5	6	7
	3	4	2+3=5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Untersucht in Partnerarbeit mithilfe dieser Würfelmatrix die in der Klasse gestellten Fragen!

Weitere Übungen

1. Für welche Spielvariante würdest du dich entscheiden?
   - Du gewinnst, wenn du mehr als 8 Augen würfelst.
   - Du gewinnst, wenn du einen Pasch (2 gleiche Zahlen) würfelst.
   - Du gewinnst, wenn du eine durch 3 teilbare Zahl würfelst.
2. Die Klasse 8b hat 1000-mal mit zwei Würfeln gewürfelt.
   Wie oft erwartest du die Augensumme 7?
3. Bei einem Schulfest bietet die Klasse 8a ein Gewinnspiel an. Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Für das Würfeln muss ein Einsatz von 50 ct gezahlt werden. Wenn die Augensumme größer als 8 ist, erhältst du 1 €.
   Wird die Klasse auf dem Schulfest einen Gewinn erzielen?
4. Variationen für weitere Aktivitäten:
   a) 2 Tetraeder (Vierflächner), Augensumme
   b) 1 Würfel und 1 Tetraeder, Augensumme
   c) Kombinationen mit Tetraeder, Würfel, Okta-, Dodeka-, Ikosaeder
5. Differenzierungsmöglichkeiten (Würfelmatrix – Augenprodukt):
   - Erstelle eine Würfelmatrix – Augenprodukt
   - Welche Zahlen kannst du nicht würfeln?
   - Du gewinnst, wenn das Produkt deiner Zahlen mindestens 15 beträgt!

Lösungen zu Wahrscheinlichkeiten

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Summe
Wahrscheinlichkeiten (Bruch)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$
Wahrscheinlichkeiten (Prozent, gerundet)	3	6	8	11	14	17	14	11	8	6	3	≈100 (101)

Symmetriebetrachtungen an der Würfelmatrix und an der Tabelle Wahrscheinlichkeiten bieten sich an!

Zu 1.: Die Lösungen der Aufgaben sind anhand der Würfelmatrix leicht ablesbar:

Bei 10 Ergebnissen ist die Augensumme größer als 8 → $\frac{10}{36}$ ≈ 28 %

Bei 6 Ergebnissen ergibt sich ein Pasch → $\frac{6}{36}$ ≈ 17 %

Bei 12 Ergebnissen ist die Augensumme durch 3 teilbar → $\frac{12}{36}$ ≈ 33 %

Zu 2.: $\frac{6}{36}$ d. h. bei 100 Würfen ≈16,67, ca. 17-mal; bei 1000 Würfen 1666,67 ca. 1667-mal

Zu 3.: Bei 10 Ergebnissen ist die Augensumme größer als 8 → $\frac{10}{36}$ ≈ 28 %

Bei 100 Würfen werden 100 · 50ct eingenommen = 50 €; bei 100 Würfen wird im Schnitt 28-mal die Augensumme mehr als 8 betragen, d. h., die Klasse wird ca. 22 € auf 100 Würfe verdienen.

Zu 4.: Methodischer Hinweis: Auch hier ist eine „Würfelmatrix“ hilfreich

Zu 5.: Augenprodukt

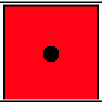
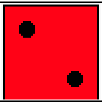
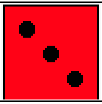
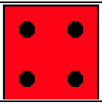
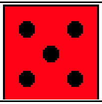
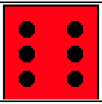
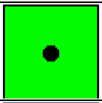
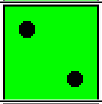
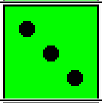
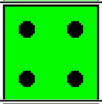
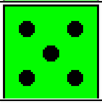
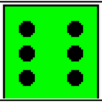
Siehe Anlage

Alle Zahlen > 36 sind nicht möglich.

Von den Zahlen, die kleiner sind als 36, können 7, 11, 13, 14, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35 nicht gewürfelt werden, weil sie nicht ausschließlich aus den Faktoren 2, 3, 4, 5 oder 6 gebildet werden. (Teilbarkeitsregeln, Faktorzerlegung)

$\frac{13}{36}$ ≈ 36 %; in 36 % der Fälle gewinnst du!

Würfelmatrix – Augenprodukt

Roter Würfel / Grüner W.						
	1	2	3	4	5	6
	2	4	6	8	10	12
	3	6	9	12	15	18
	4	8	12	16	20	24
	5	10	15	20	25	30
	6	12	18	24	30	36

Symmetriebetrachtungen an der Würfelmatrix und an der Tabelle Wahrscheinlichkeiten bieten sich an!

Wahrscheinlichkeiten

Augenprodukt	Wahrscheinlichkeit	Augenprodukt	Wahrscheinlichkeit
1	$\frac{1}{36}$	15	$\frac{2}{36}$
2	$\frac{2}{36}$	16	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	18	$\frac{2}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	20	$\frac{2}{36}$
5	$\frac{2}{36}$	24	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{4}{36}$	25	$\frac{1}{36}$
8	$\frac{2}{36}$	30	$\frac{2}{36}$
9	$\frac{1}{36}$	36	$\frac{1}{36}$
10	$\frac{2}{36}$	Σ	$\frac{36}{36}$
12	$\frac{4}{36}$		

6. 3 Wahrscheinlichkeiten bei einem nicht-idealen Würfel

LEHRPLANBEZUG

a) **inhaltsbezogen**

L5 Daten und Zufall

- Zufällige Erscheinungen erkennen und beschreiben
- Spiele/einstufige Zufallsexperimente
- Prognosen
- Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen schätzen

b**) kompetenzbezogen**

K2: Probleme mathematisch lösen

- Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten

K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen

- Mathematische Werkzeuge (wie Tabellenkalkulation) sinnvoll und verständig einsetzen

K6: Kommunizieren

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Die Schülerinnen und Schüler geben Anteile als Brüche und Prozentsätze an. Sie bestimmen relative Häufigkeiten und tragen Wertepaare entsprechend der Festlegung in Ausgangsgröße und abhängiger Größe in ein Koordinatensystem ein.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit ist den Schülerinnen und Schülern bekannt und sie können Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Laplace-Experimenten bestimmen.

Grundlegende Fertigkeiten im Umgang mit einer Tabellenkalkulation (Anlegen einer Tabelle, Suchen von Elementen in markierten Bereichen, Erstellen eines Graphen) sind vorhanden.

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Problemstellung

Anlässlich eines Schulfests haben Schülerinnen und Schüler Tonwürfel hergestellt. Nun soll mit diesen „Würfeln“ gespielt werden.

Wie wahrscheinlich sind die möglichen Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 und 6?

Im Unterrichtsgespräch werden erste Vermutungen über ein mögliches Vorgehen getroffen. Eventuell besitzt die Lehrkraft auch einen solchen nicht-idealen Würfel, der natürlich aus einem anderen Material sein kann. Ergebnis ist, dass zur Angabe der Wahrscheinlichkeiten häufig gewürfelt werden muss und die aufgetretenen Augenzahlen bezüglich der Häufigkeit der möglichen Ergebnisse auszuwerten sind.

Wenn ein eigener „Nicht-idealer Würfel“ benutzt wird, sind etwa 1000 Würfe in einer elektronischen Tabelle vorher zu protokollieren, damit im Unterricht zügig weitergearbeitet werden kann.

Denkbar wäre auch, dass eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern eine solche Tabelle als Hausaufgabe erstellt. Ansonsten verwendet man die mitgelieferte EXCEL-Datei mit 1300 Würfen, die zur Erleichterung für die Lehrkraft auf weiteren Tabellenblättern auch bereits die Auswertung enthält.

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Partnerarbeit am Computer, und jedes Team untersucht jeweils nur eine Augenzahl. Zuvor instruiert die Lehrkraft über die Verwendung des Suchbefehls in der Tabellenkalkulation, um so eine Tabelle der folgenden Form einfach ausfüllen zu können (vgl. EXCEL-Datei „Tonwuerfel_2006.xls"; Fundort ist unter „Eingesetzte Materialien" genannt):

Anzahl der Würfe; n	**Häufigkeit „4"; H_n(„4")**	**rel. Häufigkeit „4"; h_n(„4")**
0 – 100		
– 200		
– 300		
…		

Um einen Schätzwert festlegen zu können, wird zusätzlich nach der Ergänzung der Tabelle ein Graph zu folgender Zuordnung mit der Tabellenkalkulation erstellt:

Anzahl der Würfe $\rightarrow$ rel. Häufigkeit „4"

Es bietet sich die Verwendung des Diagrammtyps „Linie" an, weil damit nur die Datenreihe der relativen Häufigkeiten aufgetragen werden kann (vgl. Datei „Tonwuerfel_2006").

Anschießend präsentieren einzelne Gruppen mithilfe des Computers ihre Ergebnisse und erläutern den von ihnen gewählten Schätzwert. Dies kann mithilfe des Stabilisierens der relativen Häufigkeiten in der Tabelle oder mit der zunehmenden Annäherung des Graphen an eine Parallele zur waagerechten Achse begründet werden.

Als Zusammenfassung der Untersuchung werden die Ergebnisse in Form einer Tabelle festgehalten (Wahrscheinlichkeitsverteilung dieses Zufallsexperiments):

Ergebnis	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Wahrscheinlichkeit P („Ergebnis")	**0,065**	**0,195**	**0,275**	**0,19**	**0,115**	**0,16**

Eine Möglichkeit der Kontrolle ist die Überprüfung der Summe aller Wahrscheinlichkeiten. Diese muss 1 ergeben, was sich leicht begründen lässt. Falls dies nicht der Fall ist, sollte die Festlegung der Schätzwerte nochmals problematisiert werden.

Zur Sicherung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs sollte nun eine Wahrscheinlichkeit interpretiert werden. Dabei wird deutlich, dass damit eine Prognose für eine größere Zahl von Durchführungen möglich ist (Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit).

Zur Sicherung werden die einzelnen Schritte stichwortartig festgehalten.

- Auswerten der Ergebnisse einer großen Zahl von Würfen mit dem Tonwürfel durch betrachten eines Ergebnisses, z. B. der „4“
- Berechnen der relativen Häufigkeiten und Erstellen eines Diagramms, in dem die relative Häufigkeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuche aufgetragen wird.
- Das Stabilisieren der Werte für die relative Häufigkeit liefert einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit der „4“; eventuell mit Angabe eines Intervalls, in dem die Wahrscheinlichkeit voraussichtlich liegt.
- Die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Ergebnisse werden in einer Tabelle festgehalten (Wahrscheinlichkeitsverteilung) und ergeben in der Summe 1.

Ebenso kann das „Gesetz der großen Zahl“ formuliert werden, das letztlich dieser Methode zugrunde liegt.

Als Weiterführung wäre nun die Frage nach dem mittleren Gewinn oder Verlust für ein Glücksspiel möglich, wenn Einsatz und Gewinn in Abhängigkeit vom Ausgang eines Wurfes vorgegeben werden. Die Berechnung des zu erwartenden Gewinns kann mithilfe der Betrachtung der Ausgänge von z. B. 100 Spielen erfolgen. Im Grunde wird dadurch der Mittelwert berechnet, der in dieser Situation als Prognose anzusehen ist. Propädeutisch wird damit der so genannte Erwartungswert bestimmt.

ZEITBEDARF

2 Unterrichtsstunden

EINGESETZTE MATERIALIEN

EXCEL-Datei: Tonwuerfel_2006

Die Materialien können unter www.pz.bildung-rp.de heruntergeladen werden.
(Menüpfad „Materialien“ → PZ-Informationen → Jahrgang 2007)

6.4 Wahrscheinlichkeiten beim Reißnagelwurf

Lehrplanbezug

a) **inhaltsbezogen**

L5 Daten und Zufall

- Zufällige Erscheinungen erkennen und beschreiben
  - Spiele/einstufige Zufallsexperimente
  - Prognosen
- Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen schätzen

b) **kompetenzbezogen**

K2: Probleme mathematisch lösen

- vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten

K4: Mathematische Darstellungen verwenden

- verschiedene Formen der Darstellung von Situationen anwenden und interpretieren

K6: Kommunizieren

- Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse dokumentieren, verständlich darstellen und präsentieren, auch unter Nutzung geeigneter Medien

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Die Schülerinnen und Schüler können Anteile als Brüche und Prozentsätze angeben. Sie bestimmen relative Häufigkeiten und tragen Wertepaare entsprechend der Festlegung in Ausgangsgröße und abhängiger Größe in ein Koordinatensystem ein.

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Dieser Unterrichtsbaustein kann dazu dienen, den Begriff der Wahrscheinlichkeit einzuführen oder ihn auf Zufallsexperimente zu erweitern, die sich nicht als Laplace-Experiment beschreiben lassen.

Problemstellung:

Die Seitenwahl bei einem Mannschaftsspiel wird mangels Münze mit einem Reißnagel ausgeführt. Welche Endlage des Reißnagels würdest du wählen?

Im Unterrichtsgespräch werden erste Schätzungen von den Schülerinnen und Schülern eingeholt. Dabei wird geklärt, wie die beiden möglichen Ergebnisse des Zufallsversuchs benannt werden (Seite, Kopf). Um die Frage beantworten zu können, muss der „Reißnagelwurf" durchgeführt werden.

In Partnerarbeit wird das Zufallsexperiment nun 50 Mal durchgeführt, wobei jeder 25 Mal „würfelt" und die Ergebnisse in eine vorbereitete Tabelle eingetragen werden (vgl. Arbeitsblatt). Die Wurftechnik soll möglichst beliebig sein, d. h. auch variieren.

Anschließend werden alle Ergebnisse an der Tafel gesammelt und dabei die Häufigkeiten aufaddiert (vgl. Arbeitsblatt). Hier ist von der Lehrkraft Hilfestellung erforderlich (vgl. Aufgabe 2 des Arbeitsblatts). Die Schülerinnen und Schüler berechnen anschließend wiederum in Partnerarbeit die relativen Häufigkeiten und stellen diese in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuchsdurchführungen dar (vgl. Arbeitsblatt). Parallel kann eine Zweiergruppe die Ergebnisse auf einer von der Lehrkraft vorbereitete Folie eintragen (Kopie des Arbeitsblatts).

Bei etwa 15 Gruppen ergeben sich 750 Durchführungen, so dass sich ein Stabilisieren der relativen Häufigkeiten in der Regel bereits einstellen dürfte. Sollte dies noch nicht der Fall sein, sind weitere Durchführungen notwendig. Dazu erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass im Grunde ein Stabilisieren zu erwarten ist (intuitives Erfassen des Gesetzes der großen Zahl). Diese Auswertung einschließlich der Erstellung eines Graphen kann auch mithilfe einer Tabellenkalkulation erfolgen.
Mithilfe des Graphen lässt sich nun abschätzen, in welchem Intervall die Wahrscheinlichkeit für „Seite“ bzw. „Kopf“ liegen dürfte. Es kommt dabei nicht darauf an, möglichst genaue Werte zu erhalten, sondern vielmehr deutlich zu machen, dass es sich um einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit in Bezug auf einen bestimmten Reißnagel handelt. Die Angabe von ungefähren Fehlergrenzen ist dazu erforderlich. Oft wünschen Schülerinnen und Schüler genaue Werte. Gedanklich lässt sich erörtern, dass beliebig genaue Werte sich durch häufigeres Durchführen gewinnen lassen.
Der Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit ist nun zu interpretieren und mit den ursprünglichen Schätzungen zu vergleichen. Schülerinnen und Schüler erkennen dabei, dass sie nun mit einer angemessenen Methode gesicherte Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit finden können.
In der Literatur finden sich häufig folgende Werte:

$P(\text{„Kopf“}) \approx 0{,}4$; $P(\text{„Seite“}) \approx 0{,}6 = 1 - 0{,}4$

Es kann problematisiert werden, dass nach Festlegung einer Wahrscheinlichkeit sich die andere durch die Differenz zu 1 ergeben muss.

Zur Sicherung werden die einzelnen Schritte nochmals stichwortartig festgehalten.

- 50malige Durchführung des Zufallsexperiments und Festhalten der absoluten Häufigkeit eines Ergebnisses, z. B. „Seite“
- Weitere Serien à 50 „Würfe“
- Addieren der absoluten Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuchsdurchführungen für alle 50 Experimente
- Berechnen der relativen Häufigkeiten und Eintragen in ein Koordinatensystem in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuche
- Falls Stabilisierung der Werte erkennbar, festsetzen eines Schätzwertes mit Angabe eines Intervalls

Ebenso kann das „Gesetz der großen Zahl“ fixiert werden, das letztlich dieser Methode zugrunde liegt.
Eventuell kann als Hausaufgabe die Methode nochmals auf die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines Kronkorkens („liegt auf dem Rücken“, „liegt auf dem Rand“) angewendet werden. Dabei werden in der praktischen Durchführung unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten auftreten, da die Kronkorken unterschiedlich verformt sind. Damit ist es ausgeschlossen, dass alle Schülerinnen und Schüler den gleichen Schätzwert erhalten.

ZEITBEDARF

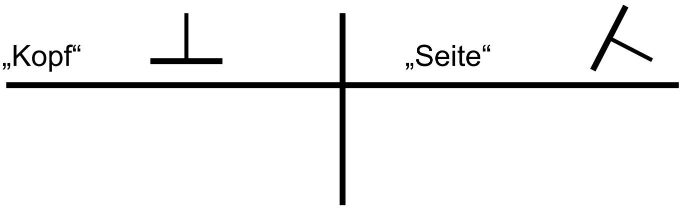
2 Unterrichtsstunden

EINGESETZTE ARBEITSBLÄTTER UND MATERIALIEN

- Reißnägel aus einer handelsüblichen Packung
- Nachfolgendes Arbeitsblatt, das in Teilen auf Folie kopiert zum Sammeln der Ergebnisse bzw. zur Präsentation und Interpretation des Graphen genutzt werden kann.

Arbeitsblatt - Wahrscheinlichkeiten beim Reißnagelwurf

1. Werft den Reißnagel 50 Mal und haltet eure Ergebnisse in Form einer Strichliste in der nachfolgenden Tabelle fest.

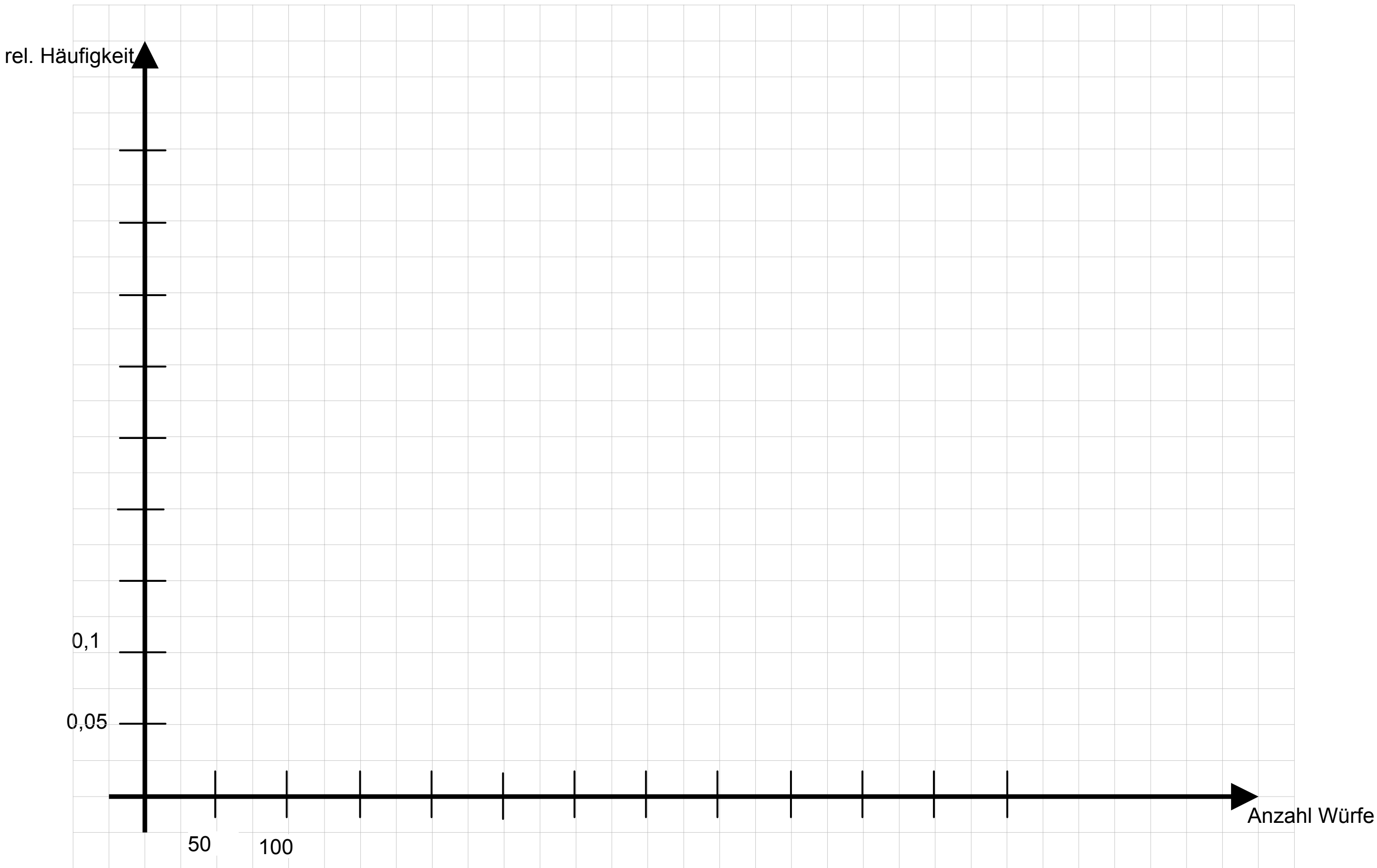


2. Die Ergebnisse der ganzen Klasse werden nun in der Tabelle gesammelt und die relative Häufigkeit von „Kopf“ und „Seite“ berechnet. Dabei ist die Anzahl der nächsten 50 „Würfe“ für die beiden Ergebnisse jeweils zu der schon bestehenden Anzahl hinzuzuaddieren.

ANZAHL WÜRFE	ANZAHL „KOPF“	ANZAHL „SEITE“	REL. HÄUFIGKEIT „KOPF“	REL. HÄUFIGKEIT „SEITE“
50				
100				
150				
200				
250				
300				
350				
400				
450				
500				
550				
600				
650				
700				
750				
800				

3.

a) Trage die relativen Häufigkeiten von „Kopf“ und „Seite“ aus der Tabelle unter Punkt 2 gegen die Anzahl der Würfe im Koordinatensystem auf.



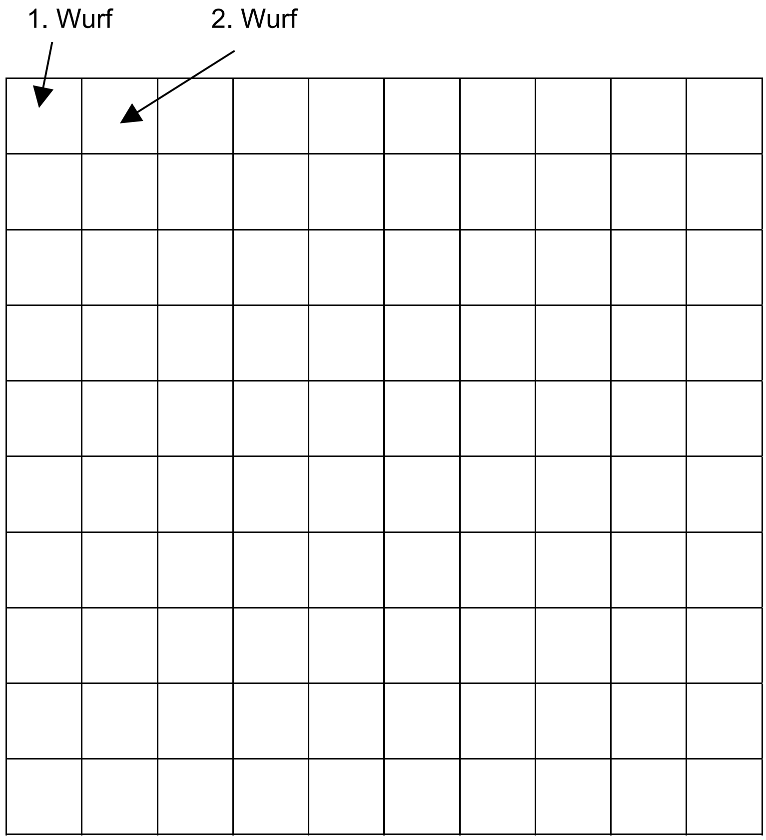
b) Verbinde die eingetragenen Punkte und interpretiere.

c) Welche Werte für die Wahrscheinlichkeiten für „Kopf“ und „Seite“ würdest du aufgrund dieser Darstellung annehmen?

6.5 Verschiedene Aufgaben

Würfeln

1. Würfele mit einem Würfel 100-mal und notiere jeweils die Augenzahl.



2. Markiere die vorkommenden Serien der Länge 2, 3, 4,...mit unterschiedlichen Farben. Formuliere Auffälligkeiten und Vermutungen!

Weitere Anregungen

1. Laplace-Experimente

a) Münzwurf als Übungsaufgabe: Stabilisieren der relativen Häufigkeit (Graph)

b) Urnenexperiment

c) Glücksräder

2. Zur Vertiefung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs

Zufallsexperimente, bei denen die Elementarereignisse nicht gleichwahrscheinlich sind:

a) Würfeln mit Lego-Steinen oder Riemer Würfeln[19]

b) Werfen von Reißnägeln

c) Werfen von Schweinchen

d) Drehen von Glücksrädern

Zu einigen Versuchen siehe Hinweise im Glossar.

[19] Leprax: http://www.leprax.de/

Lösungshinweise Würfeln

Hier zwei Beispiele, wie die Ergebnisse der Schülerinnen und Schüler erläutert werden können.

Zufallsexperiment 1

1	2	5	2	3	1	6	5	1	4
5	2	3	3	6	3	6	3	1	6
3	2	5	5	3	5	4	6	3	6
6	2	5	5	2	5	3	2	3	6
2	2	1	5	3	1	3	4	2	5
1	6	6	1	6	4	1	3	4	5
5	5	2	6	1	3	3	4	6	5
6	5	2	4	1	1	3	5	6	3
1	4	5	3	6	1	4	6	3	3
2	3	3	5	5	2	5	2	6	1

Zufallsexperiment 2

6	6	5	5	5	1	6	6	5	5
1	5	1	3	6	3	1	4	1	1
1	4	3	1	2	1	4	6	2	3
2	4	3	1	3	4	2	1	2	6
1	6	4	4	1	4	6	2	4	1
1	5	2	5	5	5	5	3	4	3
3	5	5	1	1	6	6	4	5	1
4	6	1	5	4	6	3	3	4	6
5	6	3	4	1	4	6	1	4	2
2	5	5	6	5	4	4	5	3	2

Serien:

Die Zahlen sind nicht regelmäßig verteilt. Häufig besteht die Fehlvorstellung, dass bei Zufallszahlen keine Muster und Wiederholungen auftreten dürfen.

Die längste Serie besteht bei Zufallsexperiment 1 aus zwei gleichen Zahlen, dagegen aus vier Fünfen beim 2. Zufallsexperiment (Wurf 54-57).

Auffälligkeiten und Vermutungen:

Bei Zufallsexperiment 1 kommt die Vier weniger oft vor. Man erwartet ein gleich häufiges Auftreten aller Augenzahlen. Ob sich dies einstellt, wenn man mehr als 100-mal würfelt, kann man nicht vorhersagen.

Die Frage, ob der Würfel „gut“ ist, lässt sich aufgrund der geringen Anzahl der Würfe so nicht beantworten (vgl. Beitrag 5.2 in diesem Heft).

Glücksräder, Urnen, Wichteln, Lose

1. Zahnspange

Der Verband der Kieferorthopäden schreibt auf seiner Homepage: „Unsere Kids haben weitaus weniger Berührungsängste als die Eltern, denn fast 70 % der Kinder sind Spangenträger.“ Entwirf ein Glücksrad oder ein Urnenexperiment, mit dem man für 5 zufällig aus der Klasse ausgewählte Personen bestimmen kann, ob sie eine Zahnspange tragen.

2. Wichteln

In einer Urne sind Zettel mit Namen aller Schüler/Schülerinnen der Klasse. Jeder Schüler/jede Schülerin zieht einen Zettel und behält ihn. Der Name gibt an, für wen man ein Geschenk verpacken soll.

Führt diesen Versuch mehrmals durch und stellt fest, wie groß die relative Häufigkeit ist, dass mindestens einer sich selbst beschenkt.

3. Lose

Zwei Klassen nehmen am Schulfest mit Losbuden teil.

Klasse A: Bei uns gewinnt jedes dritte Los, denn es gibt unter 150 Losen 50 Gewinne. Ein Los kostet nur 1 €.

Klasse B: Zwar kostet ein Los bei uns 1,50 €, aber es gibt auch viel mehr Gewinne. Unter 100 Losen gibt es 75, bei denen man einen Gewinn erhält.

Bei welcher Klasse würdest du ein Los kaufen?

Lösungen zu Glücksräder/Urnen, Wichteln, Lose

1. Glücksrad/Urne Zahnspangenträger

Ein Glücksrad, das 70 % der Fläche entsprechend ausgezeichnet hat, indem z. B. von 10 gleich großen Feldern 7 rot gefärbt sind. Das Glücksrad wird für die Person gedreht; zeigt es das rote Feld an, so hat der Schüler/die Schülerin eine Zahnspange.

Urnenexperiment: Urne mit 10 Kugeln, von denen 7 die Zahnspangenträger repräsentieren und deshalb eine andere Farbe aufweisen (oder 14 von 20 u. ä.).

Materialien für weitere Aufgaben dieser Art

Blutgruppen

Blutgruppen werden vererbt und sind Eigenschaften des Blutes, die sich bei den verschiedenen Familien, ethnischen Gruppen und Rassen unterscheiden. Die einzelnen Blutgruppen können mit Hilfe spezifischer Antikörper nachgewiesen werden. In Mitteleuropa ist die Blutgruppe A mit 42 % am häufigsten, gefolgt von Blutgruppe 0 mit 38 %, Blutgruppe B mit 13 % und Blutgruppe AB mit 7 %.

Geschwister

Die Ergebnisse des Mikrozensus zeigen, dass von den 14,4 Millionen minderjährigen Kindern im Jahr 2005 ein Viertel (25 %) ohne weitere Geschwister im Haushalt groß wurde. Fast die Hälfte der minderjährigen Kinder (48 %) wuchs gemeinsam mit einem minder- oder volljährigen Geschwisterkind heran. Dabei hatte rund jedes fünfte minderjährige Kind (19 %) zwei Geschwister, knapp jedes zehnte Kind (8 %) teilte den Haushalt mit mindestens drei Geschwistern und mehr (Angaben Statistisches Bundesamt, Pressemitteilung 19.9.2006 http://www.dstat.de/ Suche „Geschwister“).

2. Wichteln

Dieses Problem wird in der Literatur als „Rencontre-Problem" [20] bezeichnet (rencontre = franz. für treffen), da es die Frage beantwortet, wann z. B. ein Schreiber wieder zufällig auf seinen eigenen Zettel trifft. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Übereinstimmung eintritt, bereits für kleine Werte von n ungefähr gleich 1/e = 0,37 ist. Dies bedeutet aber, dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens eine Übereinstimmung nahezu unabhängig von n etwa 63% (1-1/e) beträgt, was stets unterschätzt wird. Es ist also sehr wahrscheinlich, dass in einer Klasse beim Wichteln jemand sein eigenes Geschenk erhält.

3. Lose

Man kauft für 6 € Lose.
Bei A erwarte ich („Erwartungswert") 2 Gewinne auf 6 Lose.
Bei B erhalte ich für den gleichen Einsatz nur 4 Lose und erwarte aber 3 Gewinne. Also kaufe ich meine Lose bei B.

Chancen

1. Es gibt Zahlenschlösser mit vier Ringen, die die Ziffern 0...9 tragen. Maria sagt: Da kann ich meinen Geburtstag als die richtige Kombination einstellen. Peter meint, dann haben Fahrraddiebe aber eine größere Chance, die richtige Kombination zu finden. Kannst du erklären, was Peter damit meint?

2. Zeitungsmeldung vom 10. Oktober 2006: „Der Lotto-Jackpot ist geknackt. Nun kann man wieder vernünftig werden. Aber welcher Lottospieler folgt, zumindest im Moment des Kreuzchenmachens und angesichts einer Gewinnwahrscheinlichkeit von 1:140 Millionen, schon seiner Vernunft? "
Beschreibe, wie du dieses Verhältnis veranschaulichen könntest.
Benutze für den Vergleich: 1 kg Reis hat etwa 60.000 Körner.

Lösungen zu „Chancen"

1. Die Aufgabe sollte ohne einen Abzählbaum gelöst werden. Es gibt 365 mögliche Geburtstage im Jahr und 10 000 oder 9 999 Einstellungen des Zahlenschlosses (Je nachdem, ob man 0000 als Einstellung zählt oder nicht).
2. Es soll eine anschauliche Vorstellung entwickelt werden, was dieses Verhältnis bedeutet. Unter wie vielen Erbsen oder Reiskörnern wird eine bestimmtes Korn, das für die richtige Kombination steht, ausgewählt?

Verdeutlichung: Die Gewinnchance im Lotto von 1:140 Millionen bedeutet: Man greift ein bestimmtes Reiskorn unter 140 000 000 heraus.
Wenn 1 kg Reis etwa 60.000 Körner hat, dann entsprechen 140 Millionen Körner einer Menge Reis von etwa 2333 kg, das sind mehr als 2 Tonnen und diese hätten ein Volumen von ca. 2720 l. Das entspricht ungefähr einem Quader der 1,5 m lang, 1,5 m breit und 1,2 m hoch ist (Volumen beträgt 2,7 m^3).

---

[20] Eine Simulation findet man bei H. K. Strick http://www.landrat-lucas.de/mint/stochastik/rencontre.xls

7 Bausteine Daten

7.1 Manipulierte Schaubilder

Schaubilder richtig lesen

LEHRPLANBEZUG

a) **inhaltsbezogen**

L5: Daten und Zufall

- Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren

b) **kompetenzbezogen**

K4: Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung anwenden, interpretieren und unterscheiden
- Unterschiedliche Darstellungsformen je nach Situation auswählen

K6: Kommunizieren

- Die Fachsprache adressatengerecht verwenden

FACHÜBERGREIFENDE BEZÜGE

Erdkunde: Schaubilder verstehen und interpretieren; Deutsch: Werbung

Unterrichtliche Voraussetzungen

Die Schülerinnen und Schüler verfügen über grundlegende Einsichten in das Verfahren von Datenerhebungen und über Kenntnisse, diese auszuwerten und grafisch darzustellen. Sie haben gelernt, Informationen aus Schaubildern zu entnehmen. Sie können die Kreisfläche berechnen.

Hinweise für den Unterricht

In der 1. Stunde der etwa dreistündigen Unterrichtssequenz werden die Schülerinnen und Schüler ohne weitere Information mit einer Werbegrafik (bleib fit - drei Entwürfe für die Werbung, Seite 83) konfrontiert, mit der eine Firma für ihr neues Produkt wirbt, das doppelt so viel Vitamin C enthalten soll wie der Vorgänger. Die Schülerinnen und Schüler sollen erkennen, dass bei der Analyse und Beschreibung von Diagrammen auch das Zusammenspiel von Inhalt der Aussage und der Form der Darstellung beachtet werden muss.

Je nach Leistungsstand der Lerngruppe können zur Differenzierung folgende Gesprächsimpulse (auch schriftlich) gegeben werden:

- Spricht die Abbildung den Käufer an?
- Passen die Fotos zur Aussage: „Jetzt mit doppelt so viel Vitamin C“?
- Welcher Eindruck entsteht beim Betrachter?
- Ist dieser Eindruck von den Werbefachleuten beabsichtigt?

Die Bearbeitung der Aufgabe „Autohaus“ soll insgesamt zur Erkenntnis führen, dass bei grafischen Darstellungen beim Betrachter unterschiedliche Eindrücke geweckt werden können. Dies gelingt z. B. durch die gewählten Größenverhältnisse („bleib fit“) oder durch das Weglassen eines Teils der Achse („Autohaus“).
Weitere Diagramme (vergleiche Arbeitsblatt „Untersuchen von grafischen Darstellungen“) werden hinsichtlich ihres Aussagegehaltes analysiert. Hier bietet sich Gruppenarbeit an, bei der die Schülerinnen und Schüler Arbeitsblätter mit Aufgaben erhalten, die in der Anforderung unterschiedlich sind (Differenzierungsmöglichkeit).
Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Arbeitsblätter und diskutieren über die Sachverhalte bzw. über die Absichten der Gestalter der Grafiken. Wichtig ist im Anschluss eine verständliche, die Problematik beschreibende Präsentation. Dabei können Schülerinnen und Schülern mit Sprach- und Verständnisschwierigkeiten Leitfragen an die Hand gegeben werden, die das Verbalisieren und die Kommunikation erleichtern.
Mögliche Leitfragen könnten sein:

- Was ist dargestellt? Was soll veranschaulicht werden?
- Was wird miteinander verglichen bzw. einander gegenübergestellt?
- Wie werden Zahlen grafisch veranschaulicht[21]
  (Linien-, Säulen-, Balken-, Kreis-, Bilddiagramm)?
- Sind die Achsen richtig skaliert?
- Beginnt die y-Achse bei Null?
- Welche Aussagen werden dem Betrachter nahe gelegt?
- Wie will das Schaubild auf den Betrachter Einfluss nehmen?

Es bietet sich an, Schülerinnen und Schüler selbst nach manipulierten Grafiken suchen zu lassen. Im nächsten Schritt erhalten sie den Auftrag, Diagramme so zu verändern, dass beim Betrachter ein falscher Eindruck entsteht (vergleiche Arbeitsblatt „Herstellen von grafischen Darstellungen“). Die Aufgabenstellung verlangt eine exakte Analyse des Sachverhaltes, das Finden einer Lösungsidee und die Fähigkeit, die eigene Arbeit zu reflektieren und kritisch zu beurteilen.

EINGESETZTE ARBEITSBLÄTTER UND MATERIALIEN

1. Aufgabe „bleib fit“
2. Aufgabe „Autohaus“
3. Untersuchen von grafischen Darstellungen
4. Herstellen von grafischen Darstellungen

ZEITBEDARF

3 Unterrichtsstunden

[21] Siehe Glossar: Diagramme

bleib fit – Drei Entwürfe für die Werbung

Entwurf 1

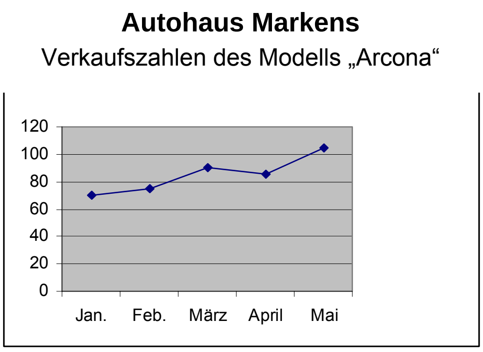
Entwurf 2

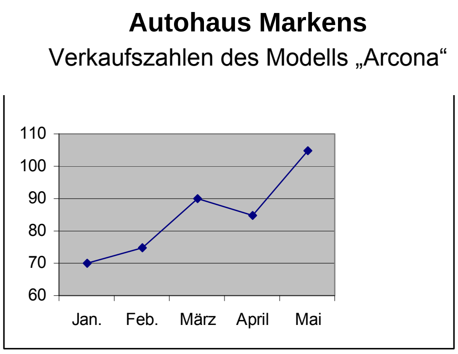
Entwurf 3

Die Werbefachleute der Firma „bleib fit“ diskutieren, welcher der drei Entwürfe für die Werbung ausgearbeitet werden soll.
Für welchen Entwurf würdet ihr euch entscheiden? Welcher Entwurf stellt den Sachverhalt richtig dar? Begründet eure Entscheidung!

Autohaus Markens

Autohaus Markens möchte seine Verkaufszahlen für das neue Modell „Arcona“ veröffentlichen. Sprecht in eurer Gruppe (sprich mit deinem Partner) über die vorbereiteten Diagramme. Welcher Eindruck entsteht jeweils beim Betrachter? Wodurch wird dieser Eindruck erzielt?

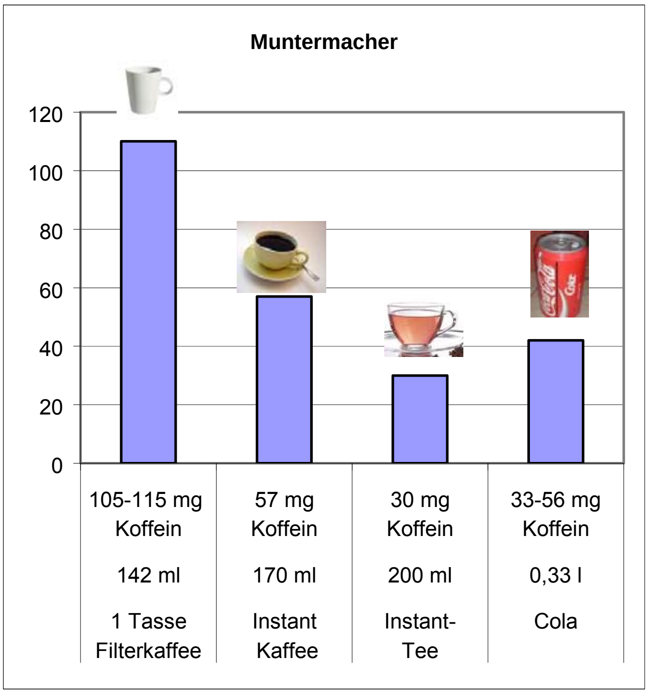




Untersuchen von grafischen Darstellungen

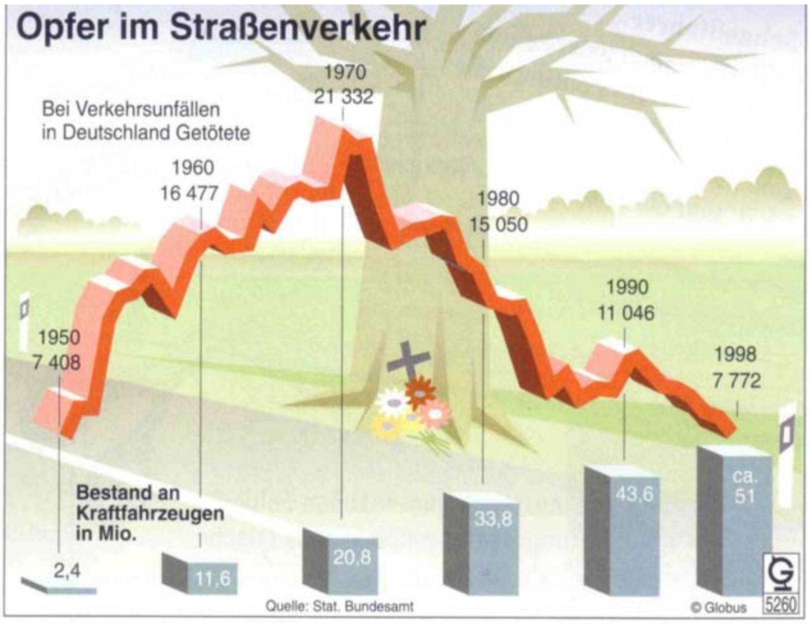
Schau dir die Abbildung genau an! Gibt sie den Sachverhalt exakt wieder? Sind für den Betrachter die Größenverhältnisse deutlich? Fertige ein Diagramm an, das die Anteile der Aufträge deutlich herausstellt!

Mit freundlicher Genehmigung der Thomson Financial Datastream



Lies aus dem Diagramm die größten Börsenverlierer ab!
Prüfe rechnerisch, ob die Darstellung stimmt.
Wie ist der Gestalter des Diagramms vorgegangen?

„Kaffee enthält doppelt so viel Koffein wie Cola.“
Kann man das aus obiger Grafik herauslesen? Was müsste an der Grafik geändert werden, damit sie aussagekräftig wird?



Überlege dir zu dieser Grafik einen passenden Text! Wie könnte die Überschrift lauten?

Herstellen von grafischen Darstellungen

Folgende Daten zur Mitgliederanzahl eines Sportvereins liegen vor:

Jahr	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**
Anzahl der Mitglieder	709	721	735	745	753

a) Entwirf eine Grafik, die die Mitgliederentwicklung aus Sicht des Vereins möglichst günstig darstellt! Findest du noch weitere Möglichkeiten?

b) Zeichne eine Grafik, die den Sachverhalt wahrheitsgemäß darstellt!

Lösungen zu „bleib fit“

Bei der Diskussion könnten folgende Aspekte angesprochen werden:

- Entwurf 3 zeigt den richtigen Sachverhalt.
- Bei dem ersten Entwurf wird beim Betrachter der Eindruck erweckt, dass nun das Getränk aus nahezu reinem Fruchtsaft besteht und deshalb besonders gesund ist.
- Bei Entwurf 2 erscheint die zweite Scheibe mehr als doppelt so groß wie die erste. Der Eindruck entsteht, weil der Radius etwa doppelt so groß ist. Zu einem doppelten Radius gehört aber die vierfache Fläche. Auch die leuchtende Farbe der zweiten Scheibe wirkt auf den Betrachter sehr positiv.

Für welche Abbildung sich die Schülergruppen entscheiden ist nicht vorhersehbar, weil die Kriterien, nach denen ausgewählt wird, je nach Schwerpunktsetzung der Gruppe unterschiedlich sein können. Die Begründung muss den selbst gewählten Kriterien entsprechen. In jedem Fall soll erkannt und festgehalten werden, dass die Art der Darstellung (z. B. Größenverhältnisse, Farbe und Licht) einen Einfluss auf den Betrachter ausübt.

Mögliche Lösung zu „Autohaus Markens“

Während der Diskussion innerhalb der Gruppe und der anschließenden Aussprache im Plenum soll herausgearbeitet und festgehalten werden, dass die Abschnitte des Graphen unterschiedlich starke Steigungen aufweisen und dass diese Wirkung durch das Weglassen eines Teils der y-Achse erzielt wird. Der Sachverhalt wird zwar richtig wiedergegeben, die zweite Abbildung jedoch soll beim Betrachter den Eindruck erwecken, dass die Verkaufszahlen in den Monaten Januar bis Mai sehr stark gestiegen sind.

7.2 Fernsehverhalten

Lehrplanbezug

a) **inhaltsbezogen**

L 5: Daten und Zufall

- Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren
- Datenerhebungen hinsichtlich ihrer Repräsentativität hinterfragen

b) **kompetenzbezogen**

K 3: Mathematisch modellieren

- Ergebnisse in der entsprechenden Situation interpretieren

K 4: Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden

K 1: Mathematisch Argumentieren

- Mathematische Argumentationen entwickeln

FACHÜBERGREIFENDE BEZÜGE

Sozialkunde/Gemeinschaftskunde, Deutsch, Gesundheitserziehung:

Gesundheitliche Probleme bei zu hohem Fernsehkonsum

Auswirkungen des Fernsehkonsums auf das Verhalten Jugendlicher

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Die Schülerinnen und Schüler verfügen über grundlegende Fähigkeiten im Umgang mit grafischen Darstellungen. Sie sind in der Lage, ein Tabellenkalkulationsprogramm zur Auswertung der Daten und grafischen Darstellungen einzusetzen.

Die Schülerinnen und Schüler kennen den Begriff Durchschnitt (arithmetisches Mittel) und wissen, wie man diesen berechnet.

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT
Das Unterrichtsbeispiel bietet sich als Projekt an.

Einstieg

Als Einstieg eignet sich ein Text oder eine Grafik aus dem Internet zu den Themen

- Fernsehkonsum von Jugendlichen (Statistik),
- Auswirkung des Fernsehkonsums auf die Gewaltbereitschaft,
- Auswirkung des Fernsehkonsums auf die Konzentrationsfähigkeit.
- …

Erarbeitung des Fragebogens

Die Schülerinnen und Schüler formulieren zuerst Fragen zum Thema „Fernsehverhalten“, die sie besonders interessieren:

- Ist der Fernsehkonsum in den 8. Klassen höher als in den 5. Klassen?
- Gibt es Unterschiede zwischen dem Fernsehverhalten der Mädchen zu dem der Jungen?
- …

Bevor ein Fragebogen zum Thema „Fernsehverhalten“ entwickelt wird, müssen Kriterien für einen geeigneten Fragebogen erarbeitet werden:

- Der Fragebogen muss anonym sein.
- Die Fragen müssen eindeutig und kurz sein.
- Es dürfen bei einer Frage nicht zu viele Antworten möglich sein (Staffelung in Kategorien, die jedoch alle vollständig sind, d. h. alle möglichen Antworten abdecken).
- Multiple Choice ist schneller auszuwerten als freie Antworten.
- …

Ungeeignete Fragen sind z. B.:

- Was ist deine Lieblingssendung?
  (Hier ist die Fülle der Antworten sehr groß und bei der Auswertung müssen Kategorien geschaffen werden, in die die Antworten einzuordnen sind.)
- Wie lange siehst du fern?
  (Es ist sinnvoll zu unterscheiden, ob es sich um einen Schultag oder das Wochenende handelt. Es ist auch nicht klar, ob die Zeitspanne oder der Zeitpunkt gemeint ist.)

Geeignete Fragen dagegen sind z. B.:

- Alter: ____ Jahre
- Hast du einen eigenen Fernseher im Zimmer? Ja ☐ nein ☐
- Wie lange siehst du von Mo. – Do. im Durchschnitt täglich fern? ______
- Welche Sendungen siehst du dir am liebsten an?
  (Bitte nur ein Kreuz setzen!)
  ☐ Serien (z. B. „Verliebt in Berlin“)
  ☐ Sachsendungen (z. B. „Galileo“)
  ☐ Trickfilme
  ☐ Sportsendungen
  ☐ Krimis, Actionfilme
  ☐ Spielfilme (Komödien, Liebesfilme)
  ☐ Nachrichtensendungen
  ☐ Musiksendungen
  ☐ Andere

Zur anschließenden Erstellung der Fragen bietet sich Gruppenarbeit an.
Jede Gruppe überlegt sich beispielsweise vier interessante Fragen, die den Kriterien genügen. Anschließend werden die Fragen in der Klasse gesammelt und ein gemeinsamer Fragebogen erstellt. Alternativ bieten sich auch mehrere kurze Fragebögen an. Allerdings ist die Durchführung der Befragung effektiver, wenn nur ein Fragebogen benutzt wird, der einer möglichst großen Stichprobe vorgelegt wird.

Es werden daran die Begriffe statistischer Arbeit (Merkmal, Merkmalsausprägungen, Grundgesamtheit, Stichprobe) erläutert. Die Entscheidungen über die Grundgesamtheit und die Stichprobe treffen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der Lehrkraft.
Mögliche Überlegungen dazu sind:
- Werden nur Schülerinnen und Schüler unserer Schule befragt?
- Sollen wir alle Schülerinnen und Schüler einer Klassenstufe befragen oder nur repräsentative Stichproben aus den Klassen vornehmen?
- Was bedeutet die Stichprobe für die Aussagekraft einer Statistik?

Durchführung der Befragung
Die Umfrage wird innerhalb einer Schulstunde und/oder in den Pausen durchgeführt. Dazu befragt jede Kleingruppe (2-4 Schüler) beispielsweise eine Klasse.

Auswertung und Interpretation
Jede Gruppe zählt ihre Ergebnisse aus, alle Ergebnisse werden von der Lehrkraft oder einer Schülerin bzw. einem Schüler zusammengefasst. Dazu ist eine Auswertungsfolie hilfreich.
Auswertungsfolie:

Klasse		**5a**	**5b**	**5c**	**5d**	**Σ 5**	**8a**	**8b**	**8c**	**8d**	**Σ 8**	**Σ**
1) Geschlecht:	w											
	m											
2) Alter:	10-12											
	>12											
3) (Mo-Do)	0 min											
	1-30 min											
	31-60 min											
	1-2 Std.											
	>2 Std.											

Jede Gruppe stellt zwei tabellarische Auswertungen in Diagrammen dar. Den Schülerinnen und Schülern muss bewusst sein, welche Diagrammart sich für die Auswertung eines bestimmten Merkmals am besten eignet. Da sich nur skalierbare Größen in Boxplots darstellen lassen, eignen sich hier vor allem Säulen- oder Kreisdiagramme (siehe unten).

Je nach Vorwissen setzen die Schülerinnen und Schüler auch ein Tabellenkalkulationsprogramm ein. Der Vergleich innerhalb der Klassenstufen 5 und 8 und auch ein Vergleich zwischen allen 5. Klassen und allen 8. Klassen (als Gesamtheit) erfolgt zeichnerisch auf der Basis von 1-2 Merkmalen.

Die Diagramme können auch auf ein Plakat geklebt und interpretiert werden. Dazu sollen die Schülerinnen und Schüler auch auf die anfangs gestellten Fragen eingehen!

ZEITBEDARF

4 Unterrichtsstunden

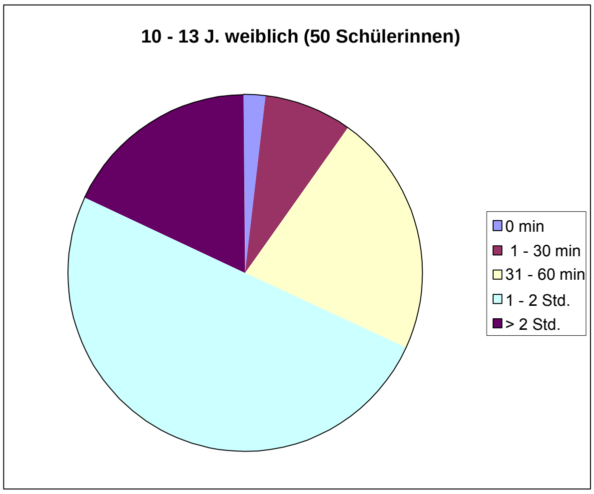
Im weiteren Verlauf sollen die Schülerinnen und Schüler in Eigenregie und außerhalb der Unterrichtszeiten eine Umfrage planen, durchführen und auswerten. Die Ergebnisse werden schulintern oder –extern veröffentlicht (Schülerzeitung, regionale Tageszeitung).

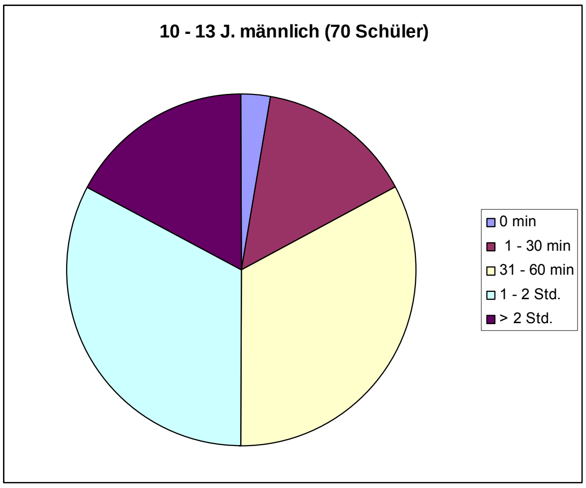
Auswertungsbeispiel 1

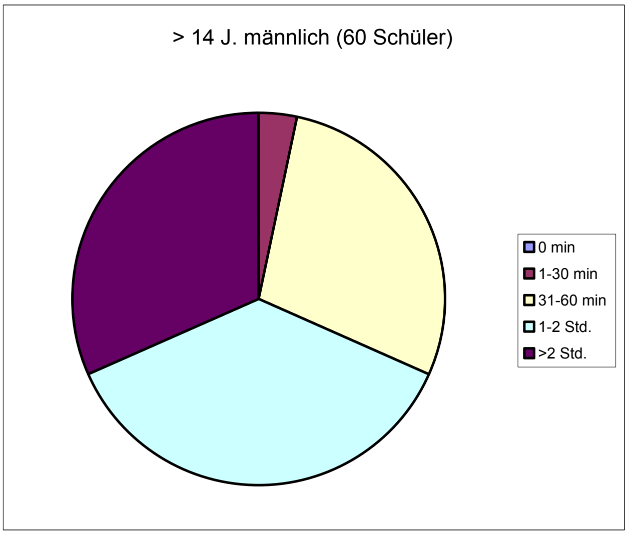
Wie lange siehst du von Montag – Donnerstag im Durchschnitt täglich fern? _______

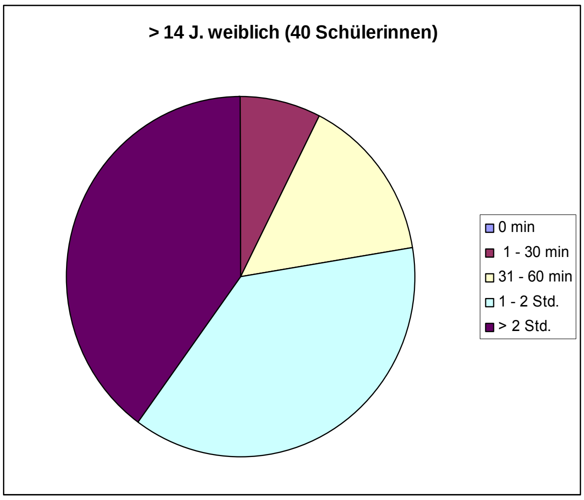
Ergebnisse zweier Altersgruppen in Mädchen und Jungen unterteilt:

	10-13 J. (120)		> 14 J. (100)	
	w (50)	m (70)	w (40)	m (60)
0 min	1	2	0	0
1-30 min	4	10	3	2
31-60 min	11	23	6	17
1-2 Std.	25	23	15	22
>2 Std.	9	12	16	19







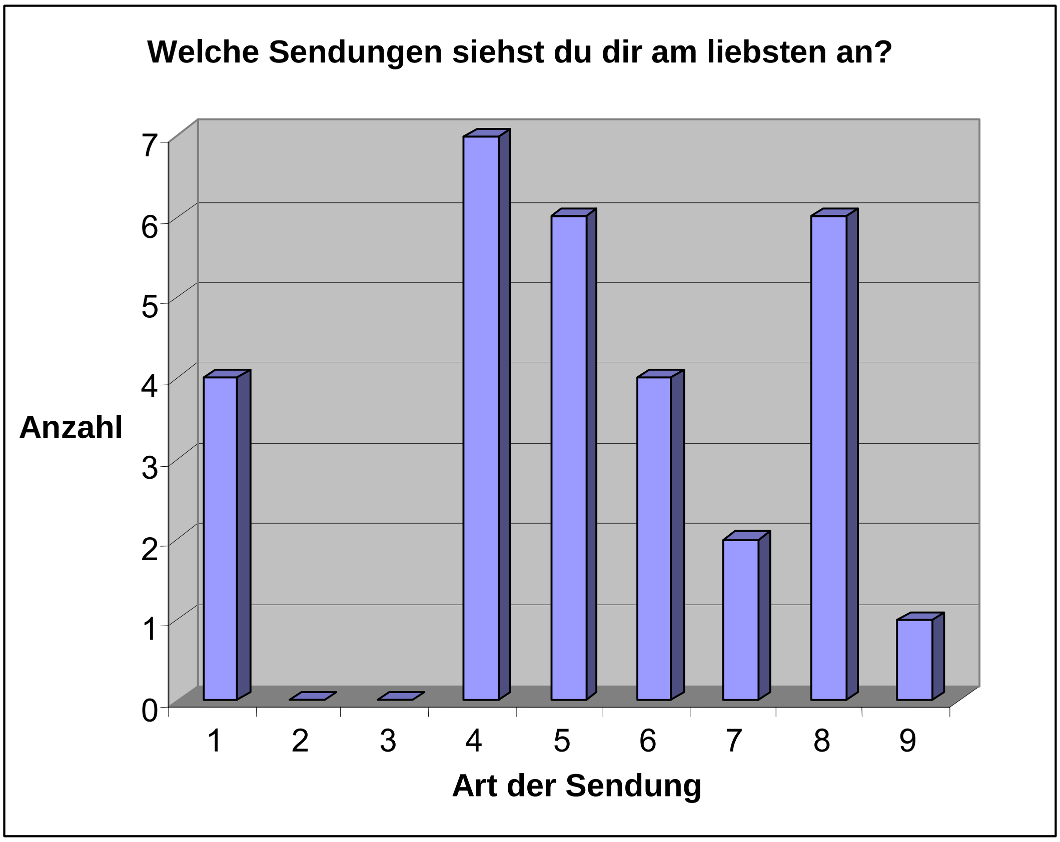


Auswertungsbeispiel 2:

Welche Sendungen siehst du dir am liebsten an?
(Bitte nur ein Kreuz setzen!)

Ergebnisse einer Klasse (30 Schülerinnen und Schüler):

Art-Nr.	**Art der Sendung**	**Anzahl**
1	Serien (z. B. „Verliebt in Berlin“)	**4**
2	Sachsendungen (z. B. Galileo)	**0**
3	Trickfilme	**0**
4	Sportsendungen	**7**
5	Krimis, Actionfilme	**6**
6	Spielfilme (Komödien, Liebesfilme)	**4**
7	Nachrichtensendungen	**2**
8	Musiksendungen	**6**
9	Sonstiges	**1**



7.3 Handy

Lehrplanbezug
a) **inhaltsbezogen**

L 5: Daten und Zufall

- Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren
- Datenerhebungen hinsichtlich ihrer Repräsentativität hinterfragen

b) **kompetenzbezogen**

K 3: Mathematisch modellieren

- Ergebnisse in der entsprechenden Situation interpretieren

K 4: Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden

K 1: Mathematisch Argumentieren

- Mathematische Argumentationen entwickeln

FACHÜBERGREIFENDE BEZÜGE

Sozialkunde/Gemeinschaftskunde, Deutsch:

Kaufverhalten von Jugendlichen

Handy als Schuldenfalle

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Die Schülerinnen und Schüler verfügen über grundlegende Fähigkeiten im Umgang mit grafischen Darstellungen. Sie sind in der Lage, ein Tabellenkalkulationsprogramm zur Auswertung der Daten und grafischen Darstellung einzusetzen.

Die Schülerinnen und Schüler kennen den Begriff Durchschnitt (arithmetisches Mittel) und wissen, wie man diesen berechnet.

Hinweise für den Unterricht

Das Unterrichtsbeispiel bietet sich als Projekt an.

Einstieg

Mögliche Impulse sind:

- Lehrer: „…ich behaupte, dass mindestens 80 % von euch ein Nokia-Handy haben …“ (Provokation)
- Grafische Darstellung zum Thema „Jugendliche und ihre Handys“ mitbringen.
  Gilt das auch für euch?
- Statistik über Handybesitz in Deutschland
  Problem: Wie kann ich das überprüfen?

Eine weitere Möglichkeit zum Einstieg oder als Erweiterung am Ende der Unterrichtsreihe wäre ein Text bzw. eine Grafik aus dem Internet zu dem Thema „Jugendliche in der Schuldenfalle“.

„Mit Sorgen beobachten Verbraucherschützer und Politiker die zunehmende Verschuldung vieler Jugendlicher. Über 70 Mio. Euro monatlich geben Jugendliche bis 18 Jahre für Telefonieren und Verschicken von Kurznachrichten [SMS] aus – Tendenz steigend. Jeder 5. zahlungsunfähige Schuldner ist jünger als 25 Jahre.“[22]

Erarbeitung des Fragebogens:

Die Schülerinnen und Schüler formulieren zuerst Fragen zum Thema „Handy“, die sie besonders interessieren und sammeln mögliche überprüfbare Merkmale wie z. B.:

- Besitzt die Schülerin/der Schüler ein Handy/kein Handy?
- Alter des Besitzers
- Wer finanziert das Handy?
- Hersteller des Handys
- Alter des Handys
- Ist eine Kamera integriert?
- Monatliche Kosten
- Anzahl der SMS pro Tag
- Akkulaufzeit

Bevor ein Fragebogen zum Thema „Handy“ entwickelt wird, müssen Kriterien für einen geeigneten Fragebogen erarbeitet werden (siehe Beitrag 7.2 „Fernsehverhalten“, ab S. 87).

Die Erstellung der Fragen erfolgt in Partner- oder Gruppenarbeit.

Die Fragen werden anschließend in der Klasse gesammelt, abgestimmt und in einem gemeinsamen Fragebogen zusammengefügt. Alternativ bietet sich auch hier wieder an, mehrere kurze Fragebögen zu erstellen. Wie im vorangehenden Beispiel schon erwähnt, ist die Durchführung der Befragung effektiver, wenn nur ein Fragebogen benutzt wird, der einer möglichst großen Stichprobe vorgelegt wird.

[22] Dieses Zitat stammt aus einem Artikel der Deutschen Welle vom 27.08.2003.

Es werden daran die Begriffe aus der Statistik (Merkmal, Merkmalsausprägung, Grundgesamtheit, Stichprobe) erläutert. Die Entscheidungen über die Grundgesamtheit und die Stichprobe treffen die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der Lehrkraft.

Mögliche Überlegungen dazu sind:

- Werden nur Schüler und Schülerinnen befragt?
- Werden nur Schüler und Schülerinnen unserer Schule befragt?
- Werden auch Erwachsene befragt?

Die Auswahl der Stichprobe für die Aussagekraft einer Statistik muss in der Klasse thematisiert werden und den Schülerinnen und Schülern bewusst sein.

Durchführung der Befragung

Die Umfrage wird innerhalb einer Schulstunde und/oder in den Pausen durchgeführt. Dazu befragt jede Kleingruppe (2-4 Schülerinnen und Schüler) beispielsweise eine Klasse oder Klassenstufe.

Auswertung und Interpretation

Wird die Umfrage nur in einer Klasse durchgeführt, kann die Lehrkraft die Daten in einer Tabelle mit Merkmalen sammeln! Die Schülerinnen und Schüler zählen dann und werten evtl. arbeitsteilig aus.

Tabelle mit Merkmalen (für eine Klasse, 23 Schülerinnen und Schüler):

Nr.	w / m	Hersteller	Gewicht (g)	Alter (Mon.)	Kosten/Monat (€)
1					
2					
…					

Wird die Umfrage in einer größeren Stichprobe (Klassenstufe, Schule) durchgeführt, lassen sich die Daten mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes sammeln. Die Daten zu einzelnen Merkmalen werden anschließend wieder an die Schülergruppen verteilt und ausgewertet.

Für das Merkmal „Hersteller“ eignet sich ein Säulendiagramm, für die Auswertung des Merkmals „Kosten pro Monat“ bieten sich auch Boxplots an, insbesondere wenn man verschiedene Gruppen vergleichen will.

Beispiel: Kosten/Monat (€):

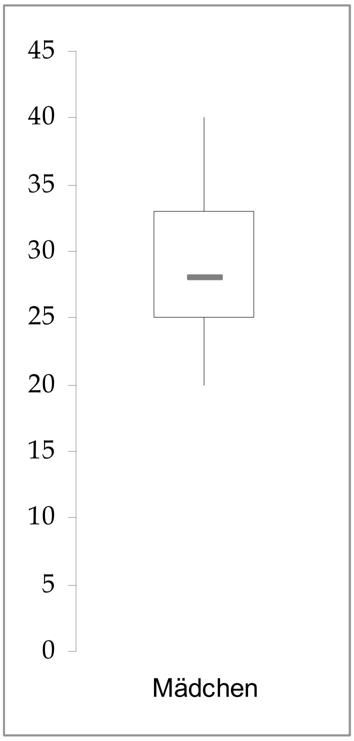
Mädchen (Anzahl 17):
40; 40; 35; 35; 33; 32; 30; 30; 28; 27; 27; 26; 25; 25; 25; 20; 20 (€)
Durchschnitt: 29, 29 €

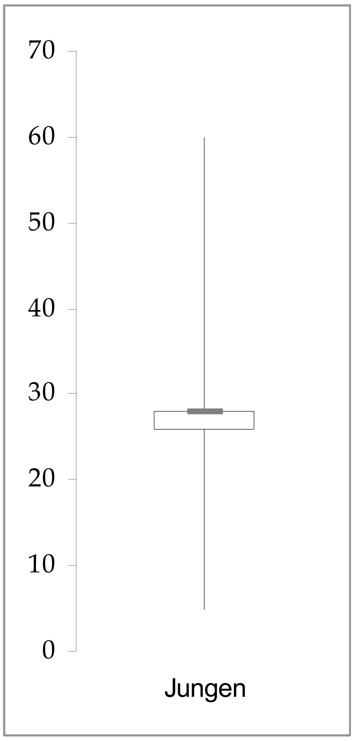
Jungen (Anzahl 13):

60; 55; 45; 28; 28; 28; 28; 27; 27; 26; 16; 10; 5 (€)

Durchschnitt: 29,46 €

Handykosten/Monat in Euro





Obwohl die durchschnittlichen Kosten pro Monat in beiden Gruppen ca. 29 € betragen, lassen die Boxlots Unterschiede erkennen. Die Handykosten in der Jungengruppe haben eine Spannweite von 5 € bis 60 €, jedoch sind die mittleren 50 % der Daten sehr ausgeglichen (die Box reicht von 26 € bis 28 €). Die Kosten in der Mädchengruppe liegen insgesamt in einem engeren Bereich, die Spannweite ist kleiner (zwischen 20 € und 40 €), jedoch ist die Box größer, d. h., die mittleren 50 % der Daten liegen zwischen 25 € und 33 €.

Es ist sinnvoll, auch eine Untersuchung des Zusammenhangs zwischen verschiedenen Merkmalen, z. B. Alter und Gewicht eines Handys anzuschließen. Dazu eignet sich für die grafische Darstellung ein Kurvendiagramm.

Bei der Interpretation der aufbereiteten Daten sollen die Schülerinnen und Schüler auf die anfangs gestellten Fragen und Vermutungen eingehen.

ZEITBEDARF

4 Unterrichtsstunden

Im weiteren Verlauf sollen die Schülerinnen und Schüler in Eigenregie und außerhalb der Unterrichtszeiten eine Umfrage planen, durchführen und auswerten. Als Themen eignen sich z. B. Kaufverhalten, Discobesuche von Jugendlichen.

Die Ergebnisse werden schulintern oder -extern veröffentlicht (Schülerzeitung, regionale Tageszeitung).

7.4 Sprungweiten

LEHRPLANBEZUG

a) **inhaltsbezogen**

L 5: Daten und Zufall

- Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren
- Datenerhebungen hinsichtlich ihrer Repräsentativität hinterfragen

b) **kompetenzbezogen**

K 3: Mathematisch modellieren

- Ergebnisse in der entsprechenden Situation interpretieren

K 4: Mathematische Darstellungen verwenden

- Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden

K 1: mathematisch Argumentieren

- Mathematische Argumentationen entwickeln

Fachübergreifende Bezüge

Sport, Physik:
Messen der Sprungkraft – Training – Technik
Fehleranalyse

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Die Schülerinnen und Schüler verfügen über grundlegende Fähigkeiten im Umgang mit grafischen Darstellungen. Sie sind in der Lage, ein Tabellenkalkulationsprogramm zur Auswertung der Daten und grafischen Darstellung einzusetzen.
Die Schülerinnen und Schüler kennen den Begriff Durchschnitt (arithmetisches Mittel) und wissen, wie man diesen berechnet.

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Das Unterrichtsbeispiel bietet sich als Projekt an.

Einstieg

Die Schülerinnen und Schüler berichten vom Fußballtraining, wo unter anderem die Sprungfähigkeit trainiert wird. Eine Hitliste der beidbeinigen Standsprungkraft soll erstellt werden.

Durchführung der Versuchsreihe

Die Versuchsreihe wird in zwei Parallelklassen durchgeführt.
Die Schülerinnen und Schüler stellen sich an einer Linie auf und springen mit beiden Beinen möglichst weit aus dem Stand. Es bietet sich an, jeden Schüler und jede Schülerin mehrmals springen zu lassen. Die Schülerinnen und Schüler diskutieren und entscheiden selbst, ob sie bei jeder Person den Durchschnittswert der Sprungweiten oder den besten Wert nehmen wollen. Anschließend werden die Ergebnisse klassenweise festgehalten (auf dem Papier oder elektronisch z. B. in einer Excel-Tabelle).
Im Anschluss an diesen Baustein findet sich ein Beispiel für zwei 8. Klassen einer Schule, auf das im Folgenden Bezug genommen wird.

AUSWERTUNG UND INTERPRETATION

Das Auswerten der Daten, Erstellen der Boxplots und die Fachbegriffe (Spannweite, Maximum, Minimum, Zentralwert (Median), oberes und unteres Quartil, Box) werden in Kapitel 3.1 näher erläutert.

Anmerkung:
Wenn diese Aufgabe zum Einführen der Boxplots benutzt werden soll, dann wird der Boxplot für die Klasse 8a gemeinsam erstellt und dabei werden die Fachbegriffe eingeführt. Als anschließende Übung wird der Boxplot für die 8b von den Schülerinnen und Schülern selbstständig gezeichnet.

Zusätzlich kann man an diesem Beispiel noch behandeln:

- Berechnung des arithmetischen Mittels und Vergleich mit dem Zentralwert
- Was macht man mit Ausreißern?[23]

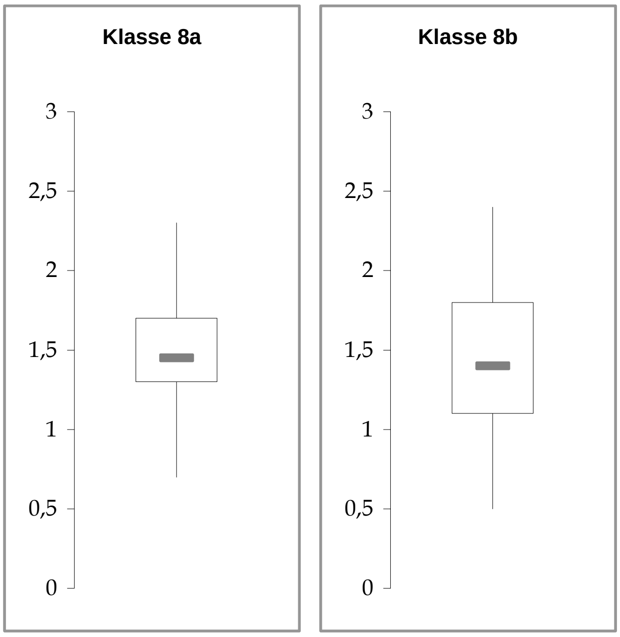
Bei der Auswertung der Boxplots muss innerhalb der Klasse diskutiert werden, nach welchen Kriterien die beste Klasse bestimmt wird. Hinweise dazu finden sich auch in Kapitel 3.1.

ZEITBEDARF

4 Unterrichtsstunden

Im weiteren Verlauf können die Schülerinnen und Schüler in Eigenregie und außerhalb der Unterrichtszeiten eine andere Versuchsreihe planen, durchführen und auswerten. Dies können eine andere Sportart, ein Reaktionstest oder Schätzübungen sein.

Die Ergebnisse werden schulintern oder –extern veröffentlicht (Schülerzeitung, Regionale Tageszeitung).



[23] Ein Ausreißer ist ein sehr kleiner oder großer Wert (siehe auch Fußnote auf der Seite 24).

AUSWERTUNG:

Boxplots der Klassen 8a und 8b

	8a		8a sortiert	
1	1,3		2,3	Maximalwert
2	1,8		2,0	
3	1,5		1,9	
4	2,0		1,9	
5	1,3		1,8	
6	0,8		1,8	
7	1,3		1,7	
8	1,5		1,5	
9	1,8		1,5	
10	0,8		1,5	
11	1,3		1,5	
12	1,9	Boxplot	1,5	Zentralwert (Median)
13	0,8	50 % aller Daten	1,4	(1,45)
14	1,5		1,3	
15	0,7		1,3	
16	1,3		1,3	
17	1,7		1,3	
18	1,5		1,3	
19	0,9		1,2	
20	2,3		0,9	
21	1,5		0,8	
22	1,4		0,8	
23	1,9		0,8	
24	1,2		0,7	Minimalwert
			34:24 = **1,42**	Summe: 24= arithmetisches.Mittel

	8b	8b sortiert	
1	1,1	2,4	Maximalwert
2	1,8	2,3	
3	1,3	2,1	
4	2,1	1,9	
5	1,3	1,9	
6	0,9	1,9	
7	1,3	1,8	
8	1,6	1,8	
9	1,8	1,6	
10	0,8	1,6	
11	2,4	1,5	Zentralwert (Median)
12	1,9	1,3	(1,4)
13	0,8	1,3	
14	1,6	1,3	
15	0,5	1,3	
16	1,3	1,1	
17	1,9	1,1	
18	1,5	0,9	
19	0,9	0,9	
20	2,3	0,8	
21	1,9	0,8	
22	1,1	0,5	Minimalwert
23			
24			
		32,1:22 = **1,46**	

7.5 Schätzen

LEHRPLANBEZUG

a) **inhaltsbezogen**

L5: Daten grafisch aufbereiten und interpretieren

- Spannweite, Median, Boxplot

L2: Messen und Größen

- schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten

b) **kompetenzbezogen**

K3: Ergebnisse in dem entsprechenden Bereich und der entsprechenden Situation interpretieren und prüfen
K4: Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Objekten anwenden, interpretieren und unterscheiden

UNTERRICHTLICHE VORAUSSETZUNGEN

Schülerinnen und Schüler können Datenreihen in Boxplots darstellen.

FACHÜBERGREIFENDE BEZÜGE

Naturwissenschaften: Volumina von Flüssigkeiten schätzen, Versuchsreihen interpretieren und darstellen, Messen

HINWEISE FÜR DEN UNTERRICHT

Problemstellung

Bei welcher Gefäßform lässt sich der Inhalt besonders schwer schätzen?

Firmen verwenden insbesondere bei Parfüms oder Kosmetika verschiedene Formen von Verpackungen, die ein größeres Volumen vortäuschen. Hier sollen Gefäße für Flüssigkeiten betrachtet werden.

Schülerinnen und Schüler haben häufig auch Schwierigkeiten, wenn Volumina von Flüssigkeiten geschätzt werden sollen. Zur Übung des Schätzens von Flüssigkeiten dient der erste Versuch.

1) Zum Einstieg in die Thematik werden verschiedene Gefäße vorgestellt, die alle das gleiche Fassungsvermögen[24] haben und teilweise mit Flüssigkeiten gefüllt sind. Die Schülerinnen und Schüler betrachten die Gefäße und geben nach kurzer Diskussion eine Schätzung darüber ab, welche Flüssigkeitsmenge das größte Volumen hat. Die Flüssigkeitsmengen können auch der Größe nach geordnet werden, zum Vergleich kann eine Flüssigkeitsmenge angegeben werden (vgl. rechte Abbildung).

[24] Alle Gefäße - außer dem rechten – haben das gleiche Fassungsvermögen: 200ml. Das ganz rechte fasst 250 ml.

2) Zu zwei ausgewählten, teilweise gefüllten Flaschen mit gleichem Volumen soll jede Schülerin und jeder Schüler der Klasse eine möglichst genaue Schätzung im Heft notieren. Die Schätzungen werden gesammelt und an der Tafel der Größe nach sortiert. In Gruppenarbeit werden die zugehörigen Boxplots erstellt. Anhand des Boxplots werden die Schätzungen für beide Flaschen verglichen und bewertet sowie Unterschiede in Bezug auf die Flaschenform diskutiert. Am Ende wird die Schätzung mit Hilfe einer Messung überprüft.

EINGESETZTE ARBEITSBLÄTTER UND MATERIALIEN

Verschiedene Flaschenformen

ZEITBEDARF

2 Unterrichtsstunden

Lösungen zu „Schätzen“

Inhalt der Gefäße

125 ml 75 ml 60 ml 100 ml