Pädagogisches Zentrum
Rheinland-Pfalz
Bad Kreuznach

PZ-Information 8/2007

Mathematik

Daten und Zufall

Vorschläge für einen handlungsorientierten Unterricht in den Klassenstufen 7 und 8

Inhalt

Vorwort

Der neue rheinland-pfälzische Lehrplan Mathematik, der auf den bundesweiten fachlichen Bildungsstandards fußt, sieht für die Mittelstufe bereits das Thema Wahrscheinlichkeitsrechnung vor. Dies stellt einige Lehrerinnen und Lehrer vor neue Herausforderungen, haben sie doch Teile dieses Themenbereichs bislang noch nicht unterrichtet. Die derzeit in Rheinland-Pfalz eingeführten Mathematikschulbücher bieten darüber hinaus bislang kaum Aufgaben zu diesem Thema.

Die vorliegende Handreichung – initiiert durch das Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur - will die unterrichtliche Realisierung dieses Themas in zweierlei Hinsicht unterstützen: Zum einen sollen die erforderlichen fachlichen Grundlagen an Beispielen erläutert werden. Zum anderen enthält das Heft von Lehrerinnen und Lehrern entwickelte und erprobte Materialien, die unmittelbar im Unterricht eingesetzt werden können. Somit handelt es sich also bewusst nicht um eine streng fachwissenschaftliche Darstellung des Themenkomplexes. Vielmehr soll letztendlich die Umsetzung dieses Lehrplanteils befördert werden, ohne die nächste Schulbuchgeneration abwarten zu müssen.

Die vorliegende Handreichung wendet sich somit an alle Kolleginnen und Kollegen und bezieht sich auf die so genannten Basis-Inhalte der Klassenstufen 7 und 8 des neuen Lehrplans. Sie sind dort mit **B** gekennzeichnet.

Erste Entwürfe zu dieser Veröffentlichung entstanden anlässlich einer Tagung des Instituts für Lehrerfort- und -weiterbildung Mainz (ILF) in Zusammenarbeit mit dem Pädagogischen Zentrum Rheinland-Pfalz. Die Handreichung fasst die Vorträge und Ergebnisse dieser Tagung zusammen. Die von der Arbeitsgruppe erarbeiteten Unterrichtsbausteine werden dabei in einem einheitlichen und übersichtlichen Format dargestellt. Kolleginnen und Kollegen an den Schulen können so ohne großen Aufwand passende Beispiele für ihre Lerngruppen auswählen. An vielen Stellen finden sich Arbeitsblätter mit Lösungshinweisen, die zum unmittelbaren Einsatz im Unterricht gedacht sind.

Mitglieder der Arbeitsgruppe:

Matthias Christmann, Hugo-Ball-Gymnasium, Pirmasens

Angela Euteneuer, Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz, Bad Kreuznach

Franz Hein, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur, Mainz

Alexsandra Misra, Hauptschule Leiningerland, Grünstadt

Hellen Ossmann, Stefan-George-Gymnasium, Bingen

Rainer Schanz, Institut für Lehrerfort- und -weiterbildung, Mainz

Christel Schienagel-Delb, Staatliches Studienseminar für das Lehramt an
Grund- und Hauptschulen, Kaiserslautern

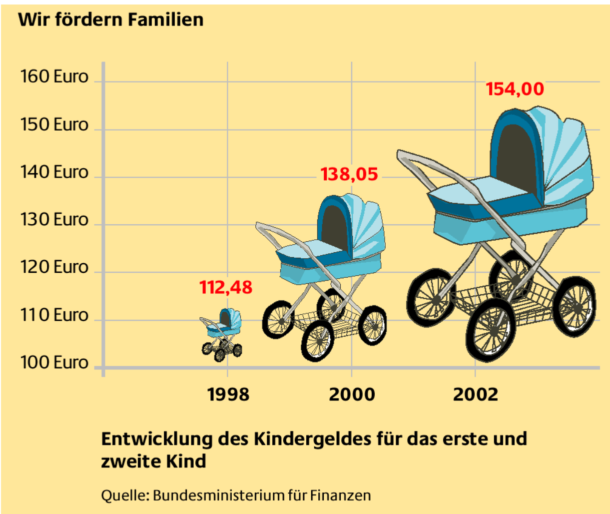
1 Stochastik in der Schule

1.1 Stochastik im Alltag

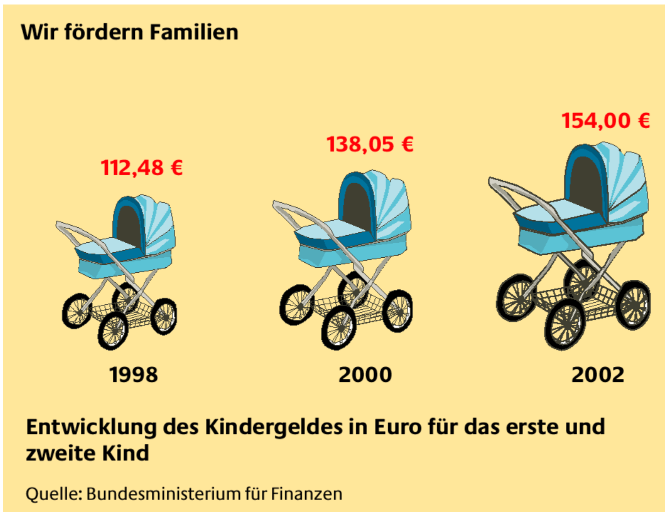
In vielen Lebensbereichen werden zunehmend grafische Darstellungen verwendet und wird mit Wahrscheinlichkeiten argumentiert. Dabei werden Darstellungen nicht nur zur Veranschaulichung von Ergebnissen einer Erhebung benutzt, sondern auch Interpretationen grafisch aufbereitet. Vielfach finden sich dazu irreführende Darstellungsformen z. B. im Internet, in Zeitschriften und Zeitungen sowie auch im Fernsehen. Auftrag eines zeitgemäßen Mathematikunterrichts muss es sein, alle Schülerinnen und Schüler dafür zu sensibilisieren und solche „Täuschungsversuche“ zu entlarven, um ihrer Rolle als mündiger Bürger gerecht werden zu können. So haben beinahe zwangsläufig diese Inhalte als Leitidee „Daten und Zufall“ Eingang in die Bildungsstandards für den Mathematikunterricht gefunden, und zwar sowohl für den Mittleren Schulabschluss als auch für den Hauptschulabschluss.

Ein Beispiel für eine solche irreführende Darstellung zeigen die folgenden Bilder, die den beiden Fassungen einer Broschüre der Bundesregierung zur Agenda 2010 entnommen sind[1]. Die erste Auflage der Broschüre musste aufgrund heftiger Proteste an diesen „offiziellen“ Grafiken geändert werden.

ursprünglich



geändert



[1] ursprüngliche Grafik: http://archiv.bundesregierung.de/artikel/81/557981/attachment/557980_0.pdf, Seite 45 (03.02.2007)
geänderte Grafik: http://www.wert2.de/service/dokumente/agenda%202010%20-%20Soziale%20 Gerechtigkeit,%20Wachstum%20und%20Innovation.pdf (03.02.2007)

Immer häufiger werden auch Wahrscheinlichkeitsaussagen im Alltag benutzt, wie z. B.:

- „Die Chancen von Mainz 05, im Spiel gegen Werder Bremen zu gewinnen, sind eher gering."
- „Die Regenwahrscheinlichkeit für das Wochenende beträgt 70 %."
- „Meteorologen gehen mit einer Quote von 90 % davon aus, dass im Februar in Mainz mindestens an einem Werktag mit einem Schneechaos auf morgendlichen Straßen gerechnet werden muss."
- „Auf dem Nachhauseweg waren wieder einmal fünf von sieben Ampeln rot. Ist das Schicksal oder nur Zufall?"

In Medizin oder Technik werden mit Hilfe von Modellen Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Gesundheitsrisiken berechnet und diese für Entscheidungen beim Abwägen von Nutzen und möglichen Risiken herangezogen.[2]

Eine Annäherung an den Begriff der Wahrscheinlichkeit – insbesondere bei Nicht-Laplace-Experimenten – durch relative Häufigkeiten bei einer großen Zahl von Zufallsexperimenten kann Schülerinnen und Schülern helfen, Wahrscheinlichkeiten angemessen zu interpretieren und darauf basierende Entscheidungen bewerten zu können.

---

[2] Einer von über 1000 Treffern in Google bei Eingabe von „Boxplot in der Medizin":
http://www.medizin.uni-koeln.de/kai/imsie/kurse/klin_epi/KlinEpi02-Messungen.pdf

1.2 Leitidee 5: „Daten und Zufall“ in den Bildungsstandards

Bereits in den Bildungsstandards für den Primarbereich wird das Thema Daten und Zufall angesprochen. Die Leitidee heißt dort: Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Schülerinnen und Schüler erfassen bereits Daten und stellen sie in Tabellen, Schaubildern und Diagrammen dar. Umgekehrt entnehmen sie diesen auch Informationen.

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen in Zufallsexperimenten werden qualitativ verglichen. Ziel dabei ist es, Grundbegriffe zu kennen (z. B. sicher, wahrscheinlich, unmöglich) sowie die Gewinnchancen bei einfachen Zufallsexperimenten (z. B. beim Würfeln) einzuschätzen.

In den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den mittleren Schulabschluss gibt es keine großen Unterschiede bei der Leitidee „Daten und Zufall“. Die Teilkompetenzen machen es jedoch zwingend erforderlich, dass Schülerinnen und Schüler selbst aktiv tätig werden.

Leitidee 5: Daten und Zufall in den Bildungsstandards

Hauptschulabschluss	Mittlerer Schulabschluss
Die Schülerinnen und Schüler	Die Schülerinnen und Schüler
- werten grafische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,	- werten grafische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,
	- planen statistische Erhebungen,
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie grafisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel wie Software,	- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie grafisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel wie Software,
- berechnen und interpretieren Häufigkeiten und Mittelwerte,	- interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,
	- reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,
- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,	- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,
- interpretieren Wahrscheinlichkeitsaussagen aus dem Alltag,	
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsexperimenten.	- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten.

Die Aufbereitung und Interpretation erhobener Daten wird altersangemessen in den verschiedenen Klassenstufen bearbeitet. Dabei sollen aber immer auch

- Ergebnisse interpretiert,
- die Aussagekraft von Mittelwerten bewertet und
- die benutzten Modelle verdeutlicht werden.

Ein Verständnis im Umgang mit Wahrscheinlichkeiten wird so frühzeitig aufgebaut und muss im Laufe der Sekundarstufe I vertieft und ausgeweitet werden.

1.3 Leitidee 5: „Daten und Zufall“ im neuen Lehrplan Mathematik für die Klassenstufen 7 und 8

Den Bildungsstandards entsprechend wird die Leitidee „Daten und Zufall“ schon im Rahmenplan Mathematik der Grundschule thematisiert (vgl. Rahmenplan Grundschule, Allgemeine Grundlegung Teilrahmenplan Mathematik, Juni 2002, S. 34 „Wahrscheinlichkeit" und Daten bei „Sachaufgaben"). Dort finden sich folgende Stichworte:

- Stichproben, einfache Zufallsexperimente
- Lösungsrelevante Daten in Texten, Bildern, Tabellen, Diagrammen

In der Orientierungsstufe kann im Zusammenhang mit der Leitidee „Zahl und Zahlbereiche“ sowohl die Datenerhebung als auch die Mittelwertbildung in praxisbezogenen Unterrichtssequenzen durchgeführt werden. Erprobte Beispiele sind:

- Erhebungen von Daten der Mitschülerinnen und Mitschüler in der neuen Klasse
- Ergebnisse von Parallelklassen bei Sportfesten
- Statistische Erhebungen zum Thema gesunde Ernährung

Neben den Unterschieden bei grafischen Darstellungen gilt es, den Aussagewert des arithmetischen Mittels zu beurteilen.

In den beiden darauf folgenden Klassenstufen 7 und 8 werden zusätzliche Datenanalysen durchgeführt, wobei weitere statistische Kennwerte und Darstellungsweisen zur Beschreibung des Datensatzes eingeführt und kritisch benutzt werden.

Eine Ausschärfung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs in Richtung seiner mathematischen Bedeutung soll durch eigenhändiges Durchführen und Auswerten von Zufallsexperimenten erfolgen wie z. B. Würfel, Münze und Glücksrad als Beispiele für klassische Laplace-Experimente sowie Riemer-Würfel[3], Reißnägel oder andere Spielgeräte als Beispiele für die experimentelle Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten ohne geometrisches Modell. Die Darstellung bei mehrmaligem Würfeln mit Hilfe des Baumdiagramms bereitet mehrstufige Zufallsversuche vor, die im Mittelpunkt der Jahrgangsstufe 9 bzw. 9/10 stehen.[4]

---

[3] werden heute unter LUDOS Wurfgeräte vertrieben: www.mathe.leprax.de/html/ludos.htm (03.02.2007)

[4] Anmerkung:
1. Wiederholung Datenerhebung erwünscht
2. Im HS-Abschluss heißt es „bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei einfachen Zufallsexperimenten“. „Einfach“ ist z. B. auch das zweimalige Würfeln oder Münz- und Würfelwurf kombiniert.

Für diese Jahrgangsstufe vorgesehen ist eine Vertiefung der Kompetenzen im Bereich „Daten“. Deshalb sollen Schülerinnen und Schüler vermehrt Statistiken lesen und interpretieren (Quellen: Tageszeitung, Internet, Statistische Landesämter, etc.).

Im Bereich „Zufall“ werden zweistufige und in einfachen Fällen auch Zufallsversuche mit mehr als zwei Stufen durch Baumdiagramme beschrieben. Bei zweistufigen Zufallsversuchen kann die Vierfeldertafel eingeführt werden. Dabei wird mit bedingten Wahrscheinlichkeiten gearbeitet, ohne dass die Bayes´sche Formel u. ä. angewendet werden muss. Mit Hilfe von Simulationen können Werte für Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden.

Auszug aus dem Lehrplan für die Jahrgangsstufe 7/8

L5: Daten und Zufall	Empfohlener Zeitansatz: **20 Stunden/16 Stunden**

Im Bereich der Daten werden in den Klassenstufen 7 und 8 die Begriffe aus der Orientierungsstufe (absolute bzw. relative Häufigkeit und arithmetisches Mittel) aufgegriffen und um den Prozentbegriff und weitere statistische Kennwerte (Spannweite und Median) und Darstellungsweisen (z. B. Boxplots zum Vergleich von Datenreihen) ergänzt. Lag in den Klassenstufen 5 und 6 ein Schwerpunkt auf der Planung und Durchführung von Datenerhebungen, so kann jetzt auch auf bereits verfügbare Daten zurückgegriffen werden, um Datenanalysen durchführen zu können.

Alltagssituationen, in denen der Zufall eine Rolle spielt, sind den Schülerinnen und Schülern wohl vertraut (z. B. Gesellschaftsspiele, Ziehung der Lottozahlen, Regenwahrscheinlichkeit). Sie sind von subjektiven Erfahrungen geprägt, bei denen die Bedeutsamkeit des jeweiligen Ereignisses eine entscheidende Rolle spielt und die individuelle Wahrnehmung gegenüber der theoretischen Wahrscheinlichkeit stark abweichen kann. Es gilt zu verdeutlichen, dass der Blick auf den Einzelfall bzw. auf Einzelergebnisse (z. B. der nächste Spielzug) nicht ausreicht, um Prognosen zu erstellen, sondern dass diese nur auf lange Sicht eingeschätzt werden können. Damit die Lernenden mithilfe des in der Schule erworbenen Wissens auch alltägliche Zufallssituationen besser bewältigen können, gilt es, ihre Vorerfahrungen aufzugreifen (etwa durch Schätzungen im Vorfeld), Zufallsexperimente tatsächlich durchzuführen und auszuwerten sowie Abweichungen von den Schätzungen zu diskutieren. Überhaupt sind zum Aufbau tragfähiger Vorstellungen zu zufälligen Erscheinungen vielfältige Untersuchungen und Experimente nötig, die von den Schülerinnen und Schülern selbst durchzuführen sind.

Eine frühzeitige Eingrenzung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs auf Laplace-Experimente dient nicht dem Aufbau tragfähiger Vorstellungen bzw. eines flexiblen Umgangs mit Wahrscheinlichkeiten im Alltag und ist deshalb zu vermeiden.

Kompetenzen	Inhalte	Hinweise und Vernetzung
K4: Verschiedene Formen der Darstellung von Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden K3: Ergebnisse in der entsprechenden Situation interpretieren	**Daten** **B** Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren • Spannweite, Median (Zentralwert) • Boxplot	✐ L1: Zahl und Zahlbereiche: Prozent- und Zinsrechnung 💻 Tabellenkalkulation Auch irreführende Darstellungen, z. B. durch unterschiedliche Skalierung der Achsen oder durch unterschiedliche Intervallbreiten bei Säulendiagrammen
K3: Ergebnisse in der entsprechenden Situation prüfen K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden	**B** Datenerhebungen hinsichtlich ihrer Repräsentativität hinterfragen **Fachbegriffe:** Spannweite, Median, Boxplot	Beispiele angeben, etwa mit zu geringem Stichprobenumfang oder Verletzung des Zufallsprinzips bei der Auswahl → Seriosität und Datenschutz bei Umfragen, z. B. mittels Telefon oder Internet

K6: Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen	**ZUFÄLLIGE ERSCHEINUNGEN** **B** Zufällige Erscheinungen erkennen und beschreiben • einstufige Zufallsexperimente: Spiele • Prognosen	Aus dem Alltag der Schülerinnen und Schüler Z. B. bei Wahlen (auch im schulischen Umfeld) oder zu Chancen beim nächsten Spielzug ✄ Bau und Einsatz von Glücksrädern und Zufallsgeräten (z. B. „ungewöhnliche“ Würfel)
K2: Probleme mathematisch lösen K4: Verschiedene Formen der Darstellung von mathematischen Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden	Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten bei langen Versuchsreihen schätzen	Gesetz der großen Zahlen – propädeutisch Durchführung und Auswertung von Versuchsserien, auch mithilfe von Computerprogrammen → Spiele erfinden und realisieren bzw. „vermarkten“, z. B. Verkauf bei einem Schulfest (Bildende Kunst, Werken) → Entschlüsselung durch Analyse von Buchstabenhäufigkeiten (Deutsch)
K2: Vorgegebene und selbst formulierte Probleme bearbeiten K1: Mathematische Argumentationen entwickeln K6: Die Fachsprache adressatengerecht verwenden	**B** Wahrscheinlichkeiten bei zufälligen Erscheinungen berechnen bzw. deuten • Wahrscheinlichkeiten im Alltag • Wahrscheinlichkeit bei Laplace-Experimenten als Verhältnis der Anzahl der günstigen zu den möglichen Ergebnissen **Fachbegriffe:** Zufallsexperiment, Ergebnis, Wahrscheinlichkeit	Z. B. Niederschlagswahrscheinlichkeit, Trefferwahrscheinlichkeit im Fußball Spielsituationen in Gesellschaftsspielen

1.4 Grundsätzliches zum Umgang mit dem neuen Mathematiklehrplan

Die im neuen Lehrplan Mathematik gewählte Darstellung unterscheidet sich grundlegend von der des bisherigen. Zunächst werden die Inhalte nicht mehr nach den klassischen Themenblöcken (z. B. Algebra, Arithmetik, Geometrie, Gleichungen, Funktionen) geordnet, sondern die einzelnen mathematischen Themen werden unter verschiedenen übergeordneten mathematisch-inhaltlichen Leitideen zusammengefasst. Damit sollen grundlegende mathematische Konzepte verdeutlicht werden, die in den Köpfen der Lernenden gleichsam einen roten Faden bilden und helfen, ein stimmiges und variables Netz mathematischer Kompetenzen aufzubauen.

Neben den inhaltlichen Kompetenzen, die im Lehrplan in der mittleren Spalte zu finden sind, gibt es noch so genannte allgemeine mathematische Kompetenzen wie z. B. mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen und mathematisch modellieren.

Diese Kompetenzen können nur in der Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten erworben werden. Die Bildungsstandards weisen dazu sechs allgemeine mathematische Kompetenzen aus.

Im Einzelnen sind das:

- K1: Mathematisch argumentieren
- K2: Probleme mathematisch lösen
- K3: Mathematisch modellieren
- K4: Mathematische Darstellungen verwenden
- K5: Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen
- K6: Kommunizieren

In der Regel werden bei der Bearbeitung von mathematischen Problemen stets alle diese Kompetenzen benötigt. Jedoch steht häufig eine Kompetenz im Vordergrund, die für den entscheidenden Schritt von zentraler Bedeutung ist. Für den Kompetenzerwerb hat das zur Folge, dass diese angesprochene Kompetenz besonders geschult werden kann. Allerdings muss dazu im Unterricht der Kompetenzzuwachs von Zeit zu Zeit erfahrbar gemacht werden, wobei das benutzte Raster eine Strukturierungshilfe für die Gestaltung des Mathematikunterrichts bietet und den Schülerinnen und Schülern das Einordnen ihrer mathematischen Tätigkeiten in ein Handlungsnetz ermöglicht.

Diese Kompetenzen werden – weiter ausdifferenziert – im Lehrplan in der ersten Spalte „Kompetenzen“ angegeben. An folgendem Beispiel aus der Leitidee 5 der Doppeljahrgangsstufe 7/8 soll dies einmal deutlich gemacht werden.

Kompetenzen	**Inhalte**
K4: Verschiedene Formen der Darstellung von Situationen anwenden, interpretieren und unterscheiden K3: Ergebnisse in der entsprechenden Situation interpretieren	**B** Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren • Spannweite, Median (Zentralwert) • Boxplot

Damit wird aufgezeigt, dass im Zusammenhang mit dem Inhalt „Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren“ insbesondere Kompetenzen aus den Bereichen K4: „Mathematische Darstellungen verwenden“ und K3: „Mathematisch modellieren“ besonders angesprochen und damit gefördert und weiterentwickelt werden können. Parallel dazu sind sicher auch kommunikative (K6) und technische (K5) Kompetenzen erforderlich. Sie sind aber für die Auswertung und Interpretation von Daten nicht unmittelbar zentral. Gleichzeitig gibt damit der Lehrplan Hinweise, wie der Unterricht angelegt werden muss; es geht grundsätzlich um den Aufbau von Kompetenzen im Zusammenhang mit mathematischen Inhalten, um in der etwas kürzeren Sprache des Lehrplans zu bleiben, und nicht um das verständnisarme und häufig inselartige Erlernen mathematischer Techniken und Begriffe. Am Ende einer Doppeljahrgangsstufe müssen alle Kompetenzen weiterentwickelt worden sein, wobei die rheinland-pfälzischen Erwartungshorizonte[5] zum erreichten Grad der Kompetenzausprägung konkretere Angaben machen.

Mit den Buchstaben **B**, **E** und **V** in der Inhaltsspalte werden die für die verschiedenen Bildungsgänge (Zielrichtung Haupt- oder Realschulabschluss bzw. Übergang in die gymnasiale Oberstufe) unterschiedlichen inhaltlichen Umfänge gekennzeichnet.

> Die mit **B** („Basis“) gekennzeichneten Inhalte sind für die Kompetenzentwicklung aller Schülerinnen und Schüler grundlegend. Sie konkretisieren die in den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss formulierten Inhalte und sind für das Erreichen der Standards für den Hauptschulabschluss erforderlich.
>
> Mit **E** („Erweiterung“) werden solche Inhalte gekennzeichnet, mit deren Behandlung eine weitere Förderung der mathematischen Kompetenzentwicklung erfolgen kann. Die zusätzliche Behandlung dieser Inhalte ist für das Erreichen der Standards des Mittleren Schulabschlusses erforderlich.
>
> Mit **V** („Vertiefung“) werden zusätzliche Inhalte ausgewiesen, bei deren Behandlung stärker systematisches Denken und Arbeiten entwickelt werden kann und die für den Übergang in die gymnasiale Oberstufe mit Blick auf das Erreichen der „Standards für das Abitur“ (EPA) benötigt werden.

Alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen können aber bereits anhand der mit **B** gekennzeichneten Inhalte ausgebildet werden.

In der Leitidee L5 findet sich nur die Bezeichnung **B**, d. h., diese Inhalte sind für alle Schülerinnen und Schüler rheinland-pfälzischer weiterführender Schulen verbindlich. Die rechte Spalte „Hinweise und Vernetzung“ macht an geeigneten Stellen Verbindungen zwischen den Leitideen deutlich und gibt auch Hinweise zum Einsatz von Software, wie sie im Lehrplan ab Klassenstufe 7 gefordert wird. So findet sich z. B. beim eben aufgeführten Beispiel der Hinweis auf das Arbeiten mit einer Tabellenkalkulation. Schülerinnen und Schüler müssen in jedem Schuljahr ab Klassenstufe 7 mindestens einmal innerhalb einer Lernsequenz mit einer Tabellenkalkulation oder dynamischer Geometriesoftware selbstständig arbeiten. Im Rahmen der Darstellung statistischen Zahlenmaterials lässt sich dazu gut eine solche Unterrichtsreihe konzipieren, bei der Schülerinnen und Schüler das Werkzeug Tabellenkalkulation nutzen. Weitere nützliche Anregungen zur Verteilung der unterschiedlichen inhaltlichen Blöcke der verschiedenen Leitideen und deren Vernetzung sind im Begleitheft „Anregungen zur Umsetzung des Lehrplans Mathematik – Rheinland-Pfalz; Möglichkeiten der Gestaltung in den Jahrgangsstufen 7 und 8“[6] zu finden. Dieses Heft enthält auch Kurzbeschreibungen zu im Lehrplan genannten Vorhaben und Projekten. Die Durchführung eines solchen Vorhabens oder Projekts in Form einer Unterrichtssequenz zum so genannten „situierten Lernen“ wird ebenfalls einmal im Jahr vom Lehrplan gefordert.

---

[5] vgl. http://bildungsstandards.bildung-rp.de/faecher/mathematik.html (03.02.2007)

[6] vgl. http://bildungsstandards.bildung-rp.de/faecher/mathematik/lehrplan.html (03.02.2007)

1.5 Unterschiede zum bisherigen Mathematiklehrplan

Der bisherige Lehrplan thematisiert Elemente der Beschreibenden Statistik. Schon dieses Thema ist im bisherigen Unterricht häufig sehr stiefmütterlich behandelt worden, wie z. B. Ergebnisse der rheinland-pfälzischen Untersuchung MARKUS im Jahr 2000 gezeigt haben. Im nun gültigen Lehrplan werden im Bereich der Beschreibenden Statistik neue Schwerpunkte gesetzt und darüber hinaus so genannte „zufällige Erscheinungen“ mit mathematischen Methoden untersucht. Damit greift der Lehrplan die Elemente des Teilrahmenplans Mathematik der Grundschule auf und erweitert sie mit Blick auf die Vorgaben der Bildungsstandards. Somit sollen alle Schülerinnen und Schüler in die Lage versetzt werden, Zufallsphänomene zu erkennen und mit Wahrscheinlichkeiten kritisch umgehen zu können.

Der Bereich der Beschreibenden Statistik wird um ein Element der so genannten explorativen Datenanalyse erweitert, nämlich um den Diagrammtyp Boxplot[7]. Er stellt eine aussagekräftige Darstellung von Datenreihen dar, die auf die Berechnung komplexerer Streuungsmaße verzichtet. Gerade beim Vergleich unterschiedlicher Gruppen (z. B. nach Geschlecht oder nach Alter) zum selben Merkmal ermöglicht er einen guten Überblick, der schnell Spezifika der jeweiligen Verteilung erkennen lässt. Zwar finden sich solche Darstellungen bislang erst in eher wissenschaftlichen Veröffentlichungen, aber es ist damit zu rechnen, dass diese Diagramme in kurzer Zeit auch in gängigen Printmedien zu finden sein werden.

Der Aufbau von tragfähigen Vorstellungen zur Wahrscheinlichkeit muss an vielfältige Erfahrungen im Umgang mit zufälligen Erscheinungen geknüpft werden. So sind die stochastischen Vorstellungen der Lernenden häufig geprägt von subjektiven Erfahrungen im Zusammenhang mit Alltagssituationen (z. B. Gesellschaftsspiele, Ziehung der Lottozahlen, Regenwahrscheinlichkeit). Die Aufmerksamkeit ist dabei auf ein Ergebnis bei einer einzelnen Durchführung gerichtet. Aus fachlicher Sicht können aber mit Wahrscheinlichkeiten nur Aussagen auf lange Sicht gemacht werden, d. h. bei häufiger Durchführung eines Zufallsversuchs. So wundert es nicht, dass Laien in der überwiegenden Zahl die Auffassung vertreten, zufällige Ereignisse seien selten oder außergewöhnlich, zufällige Situationen (wie z. B. die Verteilung der Lottozahlen auf dem Tippschein) seien unstrukturiert und müssten gleichmäßig verteilt sein. In der Fachliteratur wird dazu oft bemerkt: Der Mensch besitzt keinen „Zufallssinn“, er denkt vielmehr in Ursache und Wirkung und hat eine Vorliebe für regelmäßige Strukturen. Daraus ergibt sich, dass die eigenhändige Durchführung und Analyse von Zufallsexperimenten durch die Schülerinnen und Schüler unverzichtbar ist. Insbesondere eignen sich solche zufälligen Erscheinungen, bei denen sich Wahrscheinlichkeiten nicht unmittelbar aus Symmetrieüberlegungen nach dem Laplace-Modell erschließen lassen (gezinkter Würfel, komplexere Zufallsversuche).

---

[7] siehe Glossar Seite 2 und Beitrag 3, „Grundlagen der Stochastik – Daten“, Seite 19ff.

2 Grundlagen der Stochastik – Zufall

In diesem Kapitel sollen an geeigneten Aufgabenstellungen aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung diejenigen Grundbegriffe, die im Lehrplan mit **B** gekennzeichnet und für alle Schülerinnen und Schüler verbindlich sind, eingeführt und aufgebaut werden. Wahrscheinlichkeitsbaum und Pfadregeln gehören zwar nicht mehr zum Pflichtbereich der Basis, werden aber ebenfalls thematisiert. Zum einen haben damit Lehrkräfte ein etwas erweitertes Hintergrundwissen, und zum anderen kann es zur inneren Differenzierung für leistungsstärkere Schülerinnen und Schüler genutzt werden.

2.1 Beschreibung von Zufallsexperimenten

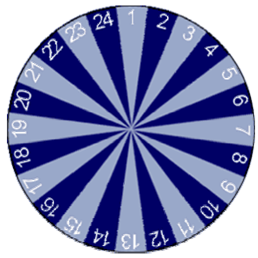
Beispiel 1: **GLÜCKSRAD**

Wie groß ist die Chance, dass das Glückrad

a) die Zahl 13,

b) eine Primzahl oder

c) eine durch 3 und 4 teilbare Zahl zeigt?



Zur Lösung dieser Aufgabe sind zunächst keine Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie erforderlich. Vielmehr lässt sich die Lösung durch einfache Überlegungen entwickeln. Im Folgenden werden die entscheidenden Schritte kurz dargestellt.

Das Glücksrad ist in 24 gleich große Sektoren unterteilt, die die Nummern 1 bis 24 tragen. Damit ist die Chance, dass das Glücksrad nach dem Drehen auf einer der Zahlen stehen bleibt, für alle Zahlen gleich groß. Dabei wird immer ein „ideales“ Glücksrad angenommen. Legt man das für die Wahrscheinlichkeit definierte Verhältnis der für ein Ereignis günstigen zur Gesamtheit aller möglichen Ergebnisse zugrunde, so muss nur noch abgezählt werden. Im Teil b) und c) sind darüber hinaus noch der Begriff der Primzahl sowie die „und“-Verknüpfung zweier Teilbarkeitseigenschaften zu berücksichtigen. Mathematisch schreibt man diese Ereignisse meist in Form von Mengen.

Für das Beispiel 1 gilt dann:

Schreibweise für die verschiedenen Ereignisse:

Ergebnismenge S = {1, 2, …, 23, 24}

Ereignis E_1 „Glücksrad zeigt Primzahl“: E_1 = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23}

Ereignis E_2 „Glücksrad zeigt eine durch 3 und 4 teilbare Zahl“: E_2 = {12, 24}

Damit ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeiten[8]:

a) P („Glücksrad zeigt die Zahl 13“) = $\frac{1}{24} = 0{,}041\overline{6} \approx 4{,}2\,\%$

b) P („Glücksrad zeigt Primzahl“) = P(E_1) = $\frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$

---

[8] Auf sinnvolles Runden soll geachtet werden.

c) P („Zahl durch 3 und 4 teilbar") = P (E_2) = $\frac{2}{24} = \frac{1}{12} = 0{,}08\bar{3} \approx 8{,}3\,\%$

Der Buchstabe P ist dabei die Abkürzung für „Wahrscheinlichkeit des Ereignisses".

Gelegentlich werden in der Alltagssprache auch Wahrscheinlichkeiten als Chancen bezeichnet und als Verhältnis der günstigen zu den ungünstigen Fällen angegeben. In der Mathematik definiert man aber die Wahrscheinlichkeit analog zu den *relativen Häufigkeiten* mit dem Unterschied, dass sich die relativen Häufigkeiten auf ein bereits durchgeführtes Zufallsexperiment beziehen. Die Wahrscheinlichkeiten erlauben sozusagen eine Prognose über die Anzahl des Eintretens eines Ereignisses bei häufiger Durchführung des Zufallsexperiments. Somit sind relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit zunächst grundsätzlich verschiedene Begriffe, weil sie von unterschiedlichen zeitlichen Richtungen aus erfolgen.

Der Lehrplan verlangt an dieser Stelle die Fachbegriffe *Zufallsexperiment, Ergebnis und Wahrscheinlichkeit*, die sich an diesem Beispiel entwickeln lassen. *Zufallsexperimente* sind dabei keine Vorgänge, die völlig willkürlich sind, sondern die Bedingungen solcher Experimente müssen klar festgelegt und reproduzierbar sein. Weiterhin lassen sich alle möglichen Ergebnisse vorher angeben, d. h., die Ergebnismenge S steht fest. Lediglich das auftretende *Ergebnis* hängt vom Zufall ab. Der Fachbegriff „Ereignis", der oben bei der Bearbeitung der Aufgabe „Glücksrad" benutzt wurde, ist im Grunde entbehrlich. In der Literatur findet sich für den Begriff „Ergebnis" auch der Fachbegriff „Elementarereignis".

Bei diesem Zugang zur Wahrscheinlichkeit wird die so genannte *Laplace-Wahrscheinlichkeit*[9] benutzt. Bei diesem Modell geht man davon aus, dass alle Ergebnisse des Zufallsversuchs die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Man spricht dann häufig auch von idealen Zufallsgeräten, da ein Glücksrad nicht unbedingt in diesem Sinne mit gleicher Chance auf jedem Sektor stehen bleibt. Somit lässt sich die Wahrscheinlichkeit als Quotient der Anzahl der zu einem Ereignis gehörenden Ergebnisse zu der Anzahl aller möglichen Ergebnisse bestimmen.

Den Wert der Wahrscheinlichkeit gilt es nun noch zu interpretieren; in unserem Beispiel etwa P („Glücksrad zeigt Primzahl") = 37,5 %. Hierbei ist die Betrachtung des mehrmaligen Durchführens hilfreich. Es kann nämlich die Prognose getroffen werden, dass bei häufiger Durchführung das jeweilige Ereignis im gleichen Verhältnis auftritt. Konkret: Wird das Glücksrad 200 Mal gedreht, ist zu erwarten, dass 75 Mal das Glücksrad auf einer Primzahl stehen bleibt. Wichtig ist hierbei, dass dies im Unterricht auch durch konkretes Ausführen untersucht wird. Es ist nämlich verblüffend, wie viel bei wenigen Durchführungen die relativen Häufigkeiten von der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses abweichen können. Dahinter steht das so genannte „*Empirische Gesetz der Großen Zahlen*", das besagt, das erst bei langen Versuchsreihen, also bei häufigem Wiederholen des Zufallsexperiments, die relativen Häufigkeiten eines Ereignisses in der Nähe der Wahrscheinlichkeit liegen. Die Anzahl der Wiederholungen kann dabei sehr groß sein. Alltagsbezüge, etwa die Interpretation einer Regenwahrscheinlichkeit, könnten sich anschließen und eventuell zu einer differenzierteren Beurteilung der Qualität von Wetterprognosen beitragen.

---

[9] Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (* 28. März 1749 in Beaumont-en-Auge in der Normandie; † 5. März 1827 in Paris) war ein französischer Mathematiker und Astronom. Er beschäftigte sich unter anderem mit Wahrscheinlichkeiten und Differentialgleichungen.

2.2 Baumdiagramme zum geschickten Abzählen

Beispiel 2: **SVENS SOCKENFARBEN**

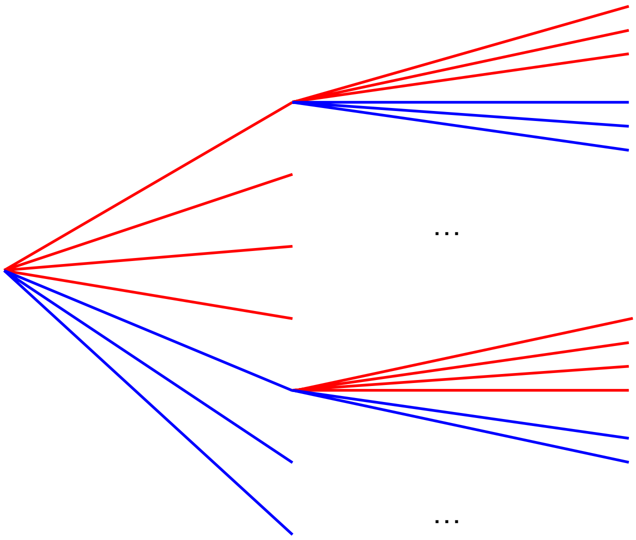
Svens Socken befinden sich ungeordnet in einer Schublade. Zurzeit enthält sie vier rote und drei blaue Socken. Morgens nimmt er wahllos zwei Socken heraus.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben beide Socken dieselbe Farbe?

Es sollen zwei Lösungen für diese Aufgabe vorgestellt werden, wobei sich nur die erste Lösung auf Methoden beschränkt, wie sie der Lehrplan im Rahmen der *B-Inhalte* vorsieht. Der zweite Lösungsweg greift bereits Methoden aus der Doppeljahrgangsstufe 9/10 für die *Erweiterung E* auf, ist also für diejenigen Schülerinnen und Schüler verpflichtend, die den Mittleren Schulabschluss oder den Übergang in die gymnasiale Oberstufe anstreben.

1. Lösungsweg: Abzählbaum

Bereits aus der Primar- und Orientierungsstufe sind den Schülerinnen und Schülern Abzählbäume bekannt. Damit lassen sich die zu diesem Ereignis günstigen und auch die Gesamtzahl der Ergebnisse leicht ermitteln. Es ergibt sich ein zweistufiges Baumdiagramm:



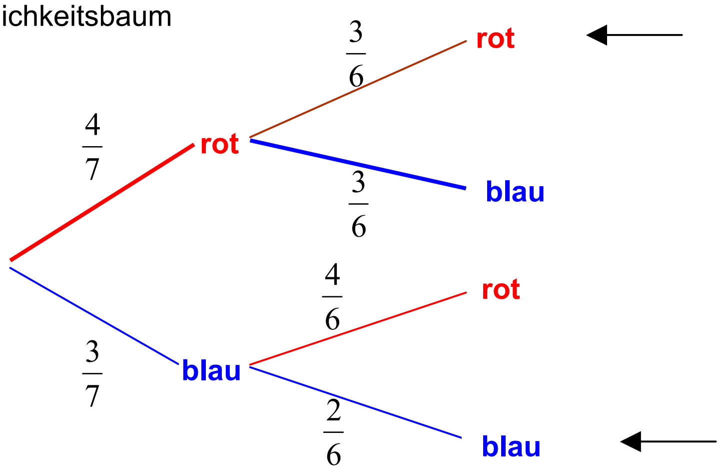
Gesamtzahl der verschiedenen Sockenpaare: $7 \cdot 6 = 42$

Günstige Möglichkeiten, also Sockenpaare mit gleicher Farbe:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{beide rot:} & 4 \cdot 3 = 12 \\ \text{beide blau:} & 3 \cdot 2 = 6 \end{array}\right\} \text{insgesamt } 18$$

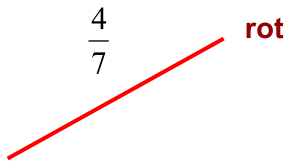
$\Rightarrow$ P („Sockenpaar mit gleicher Farbe“) = $\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$

2. Lösungsweg: Wahrscheinlichkeitsbaum



Im dargestellten Baumdiagramm werden nun nicht mehr alle Möglichkeiten übersichtlich dargestellt, sondern an jedem Teilpfad steht die Wahrscheinlichkeit, vom linken Ausgangspunkt des Teilpfades zum rechten Endpunkt zu gelangen.

Beispiel:



Dargestellt ist der linke obere *Teilpfad*.

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich daraus, dass vier von insgesamt sieben Socken rot sind. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine rote Socke zu ziehen $\frac{4}{7}$.

Nach der nächsten Verzweigung ändert sich die Gesamtzahl, also der Nenner des Bruches, weil eine Socke bereits entnommen wurde. Man spricht hier vom „Ziehen ohne Zurücklegen“ im Unterschied zu Vorgängen, die sich als „Ziehen mit Zurücklegen“ interpretieren lassen (z. B. lässt sich das Drehen eines Glücksrades als Ziehen von Kugeln aus einer Urne mit Zurücklegen simulieren).

Mit Pfeilen sind diejenigen Pfade gekennzeichnet, die günstig für das Ereignis sind. Um nun die Wahrscheinlichkeit eines kompletten Pfades (*Gesamtpfad*) zu ermitteln, muss überlegt werden, wie sich diese aus den Wahrscheinlichkeiten der Teilpfade ergibt. Die Interpretation als Verhältnis hilft hierbei weiter. Für den oberen Gesamtpfad bedeutet das:

In $\frac{4}{7}$ der Fälle ist die erste gezogene Socke rot, und davon in $\frac{3}{6}$ der Fälle die zweite gezogene Socke wiederum rot. Im Rückgriff auf die Bruchrechnung bedeutet das, die beiden Wahrscheinlichkeiten sind miteinander zu multiplizieren.

$\Rightarrow$ P(„beide gezogenen Socken sind rot“) = $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$

Mit analogen Überlegungen ergibt sich bei Betrachtung des unteren Pfades

$\Rightarrow$ P („beide gezogenen Socken sind blau“) = $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$.

Um die Wahrscheinlichkeit des zusammengesetzten Ereignisses zu bestimmen, müssen lediglich noch die beiden Wahrscheinlichkeiten addiert werden;

$\Rightarrow$ P („beide gezogenen Socken haben die gleiche Farbe“) = $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis des ersten Lösungswegs.

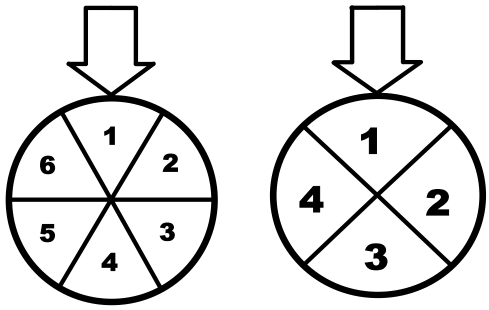
Das betrachtete Zufallsexperiment wird von der Struktur des Wahrscheinlichkeitsbaums her auch als *zweistufiges Zufallsexperiment* bezeichnet. Im Unterschied zum Abzählbaum bleibt diese Darstellung sehr viel übersichtlicher und gibt die unmittelbar für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit erforderlichen Teilwahrscheinlichkeiten wieder. Bei der Berechnung kommen die so genannten *Pfadregeln* zum Einsatz. Zum einen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für einen Gesamtpfad als Produkt der Wahrscheinlichkeiten der Teilpfade (*1. Pfadregel*). Zum anderen müssen zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses alle Gesamtpfade, die zu diesem Ereignis gehören, betrachtet werden. Deren Wahrscheinlichkeiten sind anschließend zu addieren (*2. Pfadregel*).

Beispiel 3: **VERLOSUNG**

Bei einer Verlosung werden zwei Glücksräder gleichzeitig gedreht.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigen beide Glücksräder dieselbe Zahl an?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt mindestens eines der beiden Glücksräder die Zahl 2?



An diesem Beispiel sollen nochmals die beiden Betrachtungsmöglichkeiten (Abzählbaum und Wahrscheinlichkeitsbaum) aufgezeigt werden.

1. Lösungsweg: Abzählbaum

(Vgl. dazu den Abzählbaum zum Beispiel 2: Svens Sockenfarben)

Gesamtzahl aller möglichen Kombinationen: $4 \cdot 6 = 24$

Anzahl der für a) günstigen Möglichkeiten: 4

$\Rightarrow$ P („beide zeigen dieselbe Zahl“) = $\frac{4}{24} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$

Anzahl der für b) günstigen Möglichkeiten:

Das linke Glücksrad zeigt eine 2, dann gibt es dafür vier verschiedene Möglichkeiten für das rechte. Zeigt das rechte Glücksrad eine 2, dann gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten für das linke. Insgesamt ist allerdings der Ausgang, dass beide Glückräder jeweils die 2 zeigen, doppelt gezählt worden.

$\Rightarrow$ P („mindestens eines zeigt die Zahl 2“) = $\frac{10-1}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 37{,}5\ \%$

2. Lösungsweg: Wahrscheinlichkeitsbaum

Es soll an dieser Stelle eine etwas andere Betrachtung angestellt werden, die schneller zum Ziel führt. Es handelt sich wiederum um ein zweistufiges Zufallsexperiment. Anstelle des Ereignisses E „mindestens ein Glücksrad zeigt die Zahl 2“ wird das so genannte *Gegenereignis* $\overline{E}$ „kein Glücksrad zeigt die Zahl 2“ betrachtet. Nun kann leicht nachvollzogen werden, dass gilt:

P (Ereignis) = 1 – P (Gegenereignis)

Damit kann das Baumdiagramm auf nur einen Pfad reduziert werden, der für die Berechnung der gesuchten Gegenwahrscheinlichkeit „kein Glücksrad zeigt die Zahl 2“ ausreicht.

$$\xrightarrow{\quad \frac{5}{6} \quad} \text{1. Glücksrad zeigt keine 2} \xrightarrow{\quad \frac{3}{4} \quad} \text{2. Glücksrad zeigt keine 2}$$

$\Rightarrow$ P („keines zeigt die Zahl 2“) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$ (1. Pfadregel)

$\Rightarrow$ P („mindestens eines zeigt die Zahl 2“) = 1 – P („keines …“) = $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 37{,}5\ \%$

Dieses Ergebnis lässt sich natürlich auch ohne die Betrachtung des Gegenereignisses $\overline{E}$ mithilfe des Wahrscheinlichkeitsbaums lösen.

2.3 Weitere Wahrscheinlichkeitsbegriffe

In den vorangegangenen Abschnitten wurden stets Zufallsexperimente betrachtet, auf die das Laplace-Modell angewendet werden konnte. Ganz analog dazu kann auch der Begriff „geometrische Wahrscheinlichkeit“ gebildet werden, bei der die für ein Ereignis günstige Fläche durch den Gesamtinhalt einer Fläche als Wahrscheinlichkeit verwendet wird.

In der Realität ist aber häufig die Laplace-Bedingung der Gleichwahrscheinlichkeit der Ergebnisse nicht gegeben. In solchen Fällen liefern relative Häufigkeiten langer Versuchsserien einen Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses. Dazu werden die relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von der Anzahl der Versuchsdurchführungen aufgetragen.

Mit größer werdender Anzahl „nähert“ sich die relative Häufigkeit einem Wert, der dann als Wahrscheinlichkeit festgelegt werden kann.[10] Dieses Annähern wird in der Unterscheidung zur Konvergenz als Stabilisieren relativer Häufigkeiten bezeichnet und ist als Inhalt im Lehrplan ausgewiesen.

Wahrscheinlichkeiten werden in ganz unterschiedlichen Bereichen des täglichen Lebens verwendet. So z. B. bei

- der Risikokalkulation für Versicherungen (Sterbetafeln, Unwetterschäden),
- der Simulation des Wettergeschehens,
- Computerspielen oder
- Glücksspielautomaten.

Grundsätzlich davon zu unterscheiden sind subjektive Einschätzungen von Wahrscheinlichkeiten, wie sie im Alltag, z. B. bei der Wahrscheinlichkeit des Sieges einer Mannschaft, häufig verwendet werden. Diese Form des Wahrscheinlichkeitsbegriffs entzieht sich in der Regel der genaueren Untersuchung, es sei denn, man kann auf entsprechende Statistiken zurückgreifen. Davon zu unterscheiden ist das methodische Vorgehen, Schülerinnen und Schüler zunächst Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse schätzen zu lassen. Dies schafft eine größere emotionale Bindung an das jeweilige Problem und schult das Denken in Wahrscheinlichkeiten.

[10] *Gesetz der großen Zahl*: Mit zunehmender Zahl der Durchführungen eines Zufallsexperiments verändern sich die relativen Häufigkeiten eines Ergebnisses immer weniger. Sie liegen dann in der Nähe der Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses.

3 Grundlagen der Stochastik – Daten

In diesem Kapitel werden an geeigneten Beispielen verschiedene Möglichkeiten zur Aufbereitung und Darstellung von Daten aufgezeigt. Im Lehrplan wird unter L5 „Daten und Zufall“ für die Klassenstufe 7/8 als Basiswissen gefordert, dass die Schülerinnen und Schüler Daten grafisch aufbereiten, auswerten und interpretieren können und die Fachbegriffe Spannweite, Median (Zentralwert) und Boxplot kennen. In diesem Kapitel wird insbesondere das Erstellen von Boxplots – eine Darstellungsform der explorativen Datenanalyse – näher erläutert. Boxplots sind in der Öffentlichkeit eher noch unbekannt und werden vorwiegend bei der Auswertung standardisierter Tests wie PISA verwendet. Ein Beispiel aus PISA ist auf Seite 25 nachzulesen. Es ist nicht zu unterschätzen, dass diese Aufbereitung der Daten sehr schnell und ohne großen Rechenaufwand zu erlernen ist. Außerdem kann man zwei Datenreihen hinsichtlich ihrer Streuung leicht vergleichen.

Im zweiten Teil dieses Kapitels wird auf die Erhebung von Daten näher eingegangen. Die Schülerinnen und Schüler sollen Datenerhebungen selbst planen und durchführen können und hinsichtlich ihrer Repräsentativität hinterfragen (vgl. LP 7/8 L5: Daten).

3.1 Aufbereitung und Darstellung von Daten[11]

1. Beispiel: Der Sportwettbewerb

An der SBS (**S**port**b**egeisterten-**S**chule) haben die Sportlehrerinnen und -lehrer Großes vor. Um die Sportbegeisterung ihrer Schülerinnen und Schüler zu belohnen, soll jedes Jahr eine Klasse für hervorragende Leistungen ausgezeichnet werden. So soll jedes Jahr per Zufall eine Klassenstufe und eine Disziplin per Zufallsgenerator ausgewählt werden. Dieses Jahr fiel das Los auf die Klassenstufe 8 und die Disziplin Weitsprung. Die Lehrkräfte waren total begeistert vom Engagement der Klassen. Eine Woche vor der Ehrung treffen sich die Sportlehrerinnen und -lehrer und wollen die **S**uper**S**port**K**lasse (SSK 2006) herausfinden. Hier nun die Weitsprungergebnisse der Klassen (in cm):

Klasse 8a:	430, 410, 430, 440, 430, 400, 410, 470, 440, 420, 410, 430, 420, 450, 430, 420, 430, 410, 420, 410, 430
Klasse 8b:	410, 420, 440, 430, 450, 450, 400, 420, 410, 400, 440, 430, 450, 430, 410, 420, 450, 400, 410, 420, 440, 430
Klasse 8c:	410, 450, 460, 420, 420, 440, 410, 460, 400, 420, 420, 450, 410, 420, 400, 410, 460, 450, 410, 400, 410, 450, 450, 400
Klasse 8d:	430, 420, 420, 430, 440, 430, 430, 420, 420, 430, 420, 430, 430, 410, 430, 420, 430, 430, 420, 430, 420, 420, 430

Bei der Besprechung der Sportkolleginnen und -kollegen treten dann allerdings Probleme auf …

---

[11] Angelehnt an einen Beitrag von Jens Wolf in „Methoden des Mathematikunterrichtes in Stichwörtern und Beispielen 7/8“, G. Schmidt (Hrsg.), Braunschweig 1981, Seite157ff.

- *Herr Höher:* Ich bin dafür, den Preis der Klasse zu überreichen, welche das Spitzenergebnis erzielt hat!
- *Frau Schneller:* Unmöglich, Herr Kollege! Sie wollen doch die beste Klasse auszeichnen und nicht nur einen Schüler! Wir sollten die Klasse ehren, die die meisten guten Ergebnisse erzielt hat, weil sie dann automatisch die Besten sind.
- *Frau Weiter:* Nee! Das ist auch nicht fair. Was ist, wenn in der Klasse auch viele schlechte Sprünge erzielt wurden? Ich denke wir sollten schauen, welche Klasse das ausgeglichenste Ergebnis erzielt hat.
- *Herr Höher:* Tja, Frau Kollegin, gaaanz toll und gaaanz fair. Es gibt ja nun auch sehr schlechte Klassen, die aber ein wunderbar ausgeglichenes Ergebnis erreichen, weil ja keiner die Sprunggrube erreicht! Am fairsten wäre es, wenn wir alle unsere Vorschläge unter einen Hut bringen könnten.
- *Frau Weiter:* Hätten wir doch niemals diese Idee gehabt!

Wie würdet ihr entscheiden?

Beantwortet dazu auch folgende Fragen:

1. Welche Klasse ist eigentlich die beste?
2. In welcher Klasse ist eine Leistung von 440 cm am meisten wert?
3. Welche Klasse ist die ausgeglichenste?
4. Welche Klasse hat die stärkste Spitze?

Dabei ist die erste der Fragen die weitestgehende und schwierigste. Man kann sie nicht eindeutig beantworten, da nicht definiert ist, was mit „bester Klasse“ gemeint ist. Berechnet man die Durchschnitte (*arithmetische Mittel*) der Klassenergebnisse, so stellt man fest, dass in allen Klassen der Durchschnitt ungefähr bei 426 cm liegt und somit nicht als Entscheidungskriterium herangezogen werden kann. Um die Beantwortung der Fragen zu ermöglichen, müssen die Daten geeignet aufbereitet werden. Es bietet sich zunächst an, die Sprungweiten zu ordnen. Dabei hat man die Wahl zwischen mehreren Möglichkeiten, die beispielhaft für die Sprungweiten der Klasse 8a gezeigt werden sollen:

Im Folgenden werden die Sprungweiten in Meter angegeben.

1. Lange Datenliste

Klasse **8a:**	Sprungweite in m
	4,7
	4,5
	4,4
	4,4
	4,3
	4,3
	4,3
	4,3
	4,3
	4,3
	4,3
	4,2
	4,2
	4,2
	4,2
	4,1
	4,1
	4,1
	4,1
	4,1
	4,0

2. Kurze Datenliste

Klasse **8a:**	Sprungweite (in m)	Anzahl
	4,7	**1**
	4,6	**0**
	4,5	**1**
	4,4	**2**
	4,3	**7**
	4,2	**4**
	4,1	**5**
	4,0	**1**

Datenlisten sind den Schülerinnen und Schülern bereits bekannt, die kurze Datenliste wird beispielsweise für Notenspiegel in Klassenarbeiten verwendet.

3. Boxplots

Eine weitere Möglichkeit der graphischen Darstellung liefern so genannte *Boxplots*. Am Beispiel der Sprungweiten der Klasse 8a wird diese Darstellung im Folgenden erläutert.
Die geordneten Daten (lange Datenliste) werden durch Abzählen in drei Bereiche unterteilt:

- die unteren 25 %,
- die mittleren 50 % und
- die oberen 25 % der geordneten Werte.

Man teilt zunächst die Anzahl der Werte durch vier und rundet gegebenenfalls (hier: 21 : 4 = 5,25 ≈ 5). Dann schneidet man die oberen und die unteren fünf Werte der langen Datenliste ab und erhält so die mittleren 50 % der Werte - die *Box* (hier: die elf grau unterlegten Werte).

Der kleinste Wert (untere Rand) der Box wird *unteres Quartil* (Q_1) und der größte Wert (obere Rand) der Box *oberes Quartil* (Q_3)[12] genannt (hier: Q_1 = 4,1 m; Q_3 = 4,3 m).
Der Wert, der durch Abzählen in der Mitte der gesamten Datenreihe liegt, heißt *Median* (M) oder *Zentralwert* (hier: M = 4,3 m). Das *Minimum* (M_i) ist der kleinste und das *Maximum* (M_a) der größte Wert der geordneten Datenliste (hier: M_i = 4,0 m; M_a = 4,7 m). Die folgende Grafik zeigt noch einmal alle fünf Kenngrößen eines Boxplots:

Klasse 8a:	**4,7**	← **Maximum M_a**
	4,5	
21 Daten	4,4	
	4,4	
	4,3	
	4,3	← **oberes Quartil Q_3**
	4,3	
	4,3	
	4,3	
	4,3	
	4,3	← **Median M**
	4,2	
	4,2	
	4,2	
	4,2	
	4,1	← **unteres Quartil Q_1**
	4,1	
	4,1	
	4,1	
	4,1	
	4,0	← **Minimum M_i**

[12] Die Bezeichnungen Q_1 und Q_3 kommen daher, dass unterhalb des unteren Quartils ca. ¼ und unterhalb des oberen Quartils ca. ¾ aller Werte der Datenreihe liegen. Lateinisch: Quartus: der Vierte.

Hinweise zur Bestimmung des Medians und der Quartile

Bei einer geraden Anzahl von Werten (z. B. bei 20) ist der Median nicht eindeutig festgelegt. Es gibt zwei Möglichkeiten:

a) als Median nimmt man den 10. oder 11. Wert. Dabei kommt es nicht darauf an, welcher der beiden mittleren Werte gewählt wird - in der grafischen Darstellung macht dies fast keinen Unterschied.

b) der Median wird als Durchschnitt (*arithmetisches Mittel*) des 10. und 11. Wertes berechnet und kommt evtl. in der Datenreihe nicht vor.

Für welche Möglichkeit (a) oder (b) man sich entscheidet, hängt vom Leistungsstand der Klasse und vom gewählten Beispiel ab.[13]

In der Literatur findet man folgendes Verfahren zur Bestimmung der Quartile:

Bei einer ungeraden Anzahl von Werten (z. B. 21 Werte) wählt man als unteres Quartil den Median der ersten 11 Werte der geordneten Datenliste und als oberes Quartil den Median der letzten 11 Werte.

Ist die Anzahl der Werte gerade (z. B. 20 Werte), legt man das untere Quartil als Median der ersten 10 Werte der geordneten Datenliste und das obere Quartil als Median der letzten 10 Werte fest.

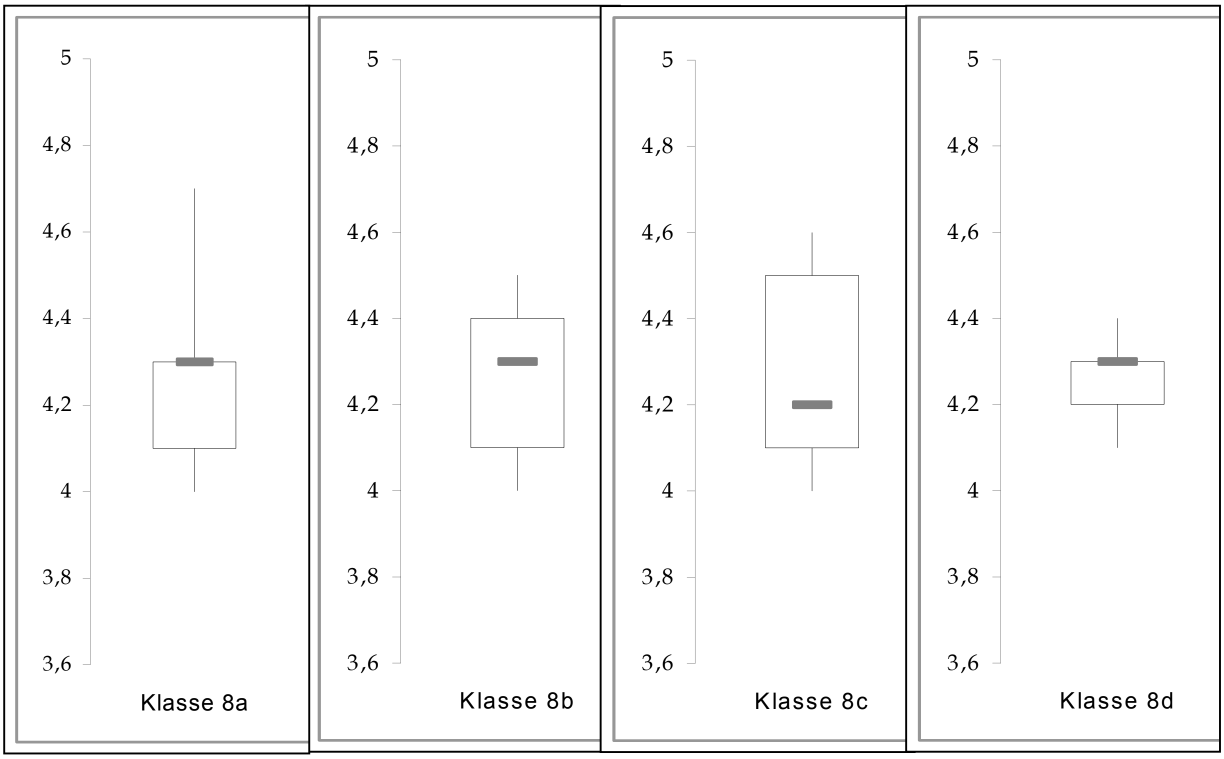
Diese Definition der Quartile sollte im Unterricht nicht benutzt werden. Es genügt völlig, wenn man die Anzahl der Werte durch vier teilt, diesen Wert rundet und damit die Box und die Quartile wie zu Beginn des Abschnittes bestimmt. Bis auf diese Berechnung erfordert das Erstellen von Boxplots keinen weiteren Rechenaufwand.

Um Datenlisten vergleichen zu können, zeichnet man ihre Boxplots nebeneinander in ein Diagramm. Dazu trägt man die fünf Kenngrößen ein und ergänzt evtl. zusätzlich den Durchschnitt (arithmetisches Mittel).

---

[13] Damit Daten in ein Boxplot-Diagramm übertragen werden können, ist es notwendig, dass sie skalierbar sind. Es macht wenig Sinn, eine Umfrage nach der Lieblingssendung der Schülerinnen und Schüler mit Hilfe von Boxplots auszuwerten.

Für die Sprungweiten der Klassen 8a bis 8d ergibt sich folgendes Diagramm:



In der Literatur bezeichnet man die „Arme" von den Rändern der Box bis zu den Randwerten als *Whisker* (engl.: Barthaar).[14] Die Box erscheint nun nicht mehr wie auf Seite 22 halb so lang wie die gesamte Datenreihe, denn mehrfach auftretende Werte werden jetzt nicht mehrfach genannt.

An einem Boxplot lassen sich neben der Spannweite weitere Eigenschaften einer Datenreihe ablesen:

- Ist die Datenreihe symmetrisch, dann ist es auch der Boxplot.
- Sind die Daten gleichmäßig zwischen Minimum und Maximum verteilt, dann liegt die Box in der Mitte und ist halb so hoch wie die Spannweite.
- Liegt ca. die Hälfte der Daten sehr nah am Median, dann ist die Box sehr schmal – liegen alle Daten sehr nah am Median, dann sind zusätzlich die Whisker kurz.
- …

Die anfangs gestellten Fragen – bis auf Frage 1, die bereits auf Seite 20 angesprochen wurde, – lassen sich mit Hilfe der obigen Abbildung leicht beantworten:

Frage 2: In welcher Klasse ist eine Leistung von 4,40 m am meisten wert?
Antwort: In der Klasse 8d, da 4,4 m zum Spitzenwert zählt.

[14] Man hat festgelegt, dass die Länge eines Whiskers maximal das 1,5-fache des Interquartilsabstandes IQR (das ist die „Höhe" der Box) betragen soll. Ist ein Wert weiter als Whiskerlänge von der Box entfernt, wird er als „Ausreißer" angesehen und nicht beachtet.

Frage 3: Welche Klasse ist die ausgeglichenste?
Antwort: Versteht man unter „ausgeglichen“, dass sehr viele Schüler ungefähr gleich weit springen, dann ist die 8d die ausgeglichenste, da hier die Box sehr schmal ist und die Spannweite nur 30 cm beträgt. Versteht man unter ausgeglichen, dass alle Sprungweiten mit ungefähr derselben Häufigkeit vorkommen, dann würde die Wahl auf die Klasse 8b fallen.

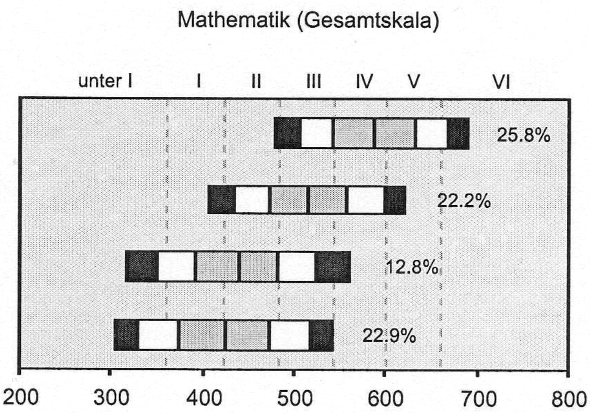
Frage 4: Welche Klasse hat die stärkste Spitze?
Antwort: Die Klasse 8c hat die stärkste Spitze, denn die Box reicht weit nach oben (das obere Quartil liegt bei 450 cm).

Anmerkung: Statt Quartilen kann man auch andere *Quantile* wählen, z. B. die *Perzentilbänder* aus der PISA-Erhebung (unterhalb des10 %-Perzentils liegen 10 % aller Testwerte etc.)

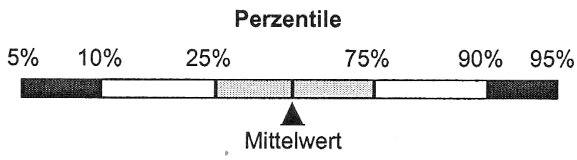
2. Beispiel: PISA-Ergebnisse 2003:[15]

Ergebnisse des zweiten Ländervergleichs, Zusammenfassung Perzentilbänder der Mathematikkompetenz und prozentualer Anteil der Schularten in Rheinland-Pfalz.

	MW	(S.E.)	**SD**
Gymnasium	**586**	(3.2)	64.5
Realschule	**514**	(2.7)	64.3
Regionale Schule / Duale Oberschule	**439**	(9.6)	71.3
Hauptschule	**424**	(3.8)	71.9



Die römischen Ziffern bezeichnen die Kompetenzstufen, deren Grenzen durch die gestrichelten Linien dargestellt sind.



Da Boxplots bislang in der Regel nicht im Unterricht behandelt wurden, werden zwei Arbeitsblätter angefügt, die dieses Verfahren vertiefen.

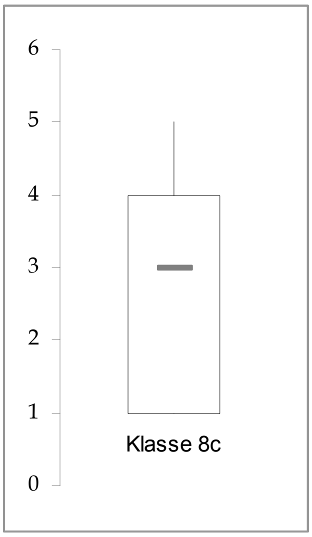
[15] PISA 2003: Ergebnisse des zweiten Ländervergleichs – Zusammenfassung (03.11.2005, Download) http://pisa.ipn.uni-kiel.de/index.html (16.02.2007)

Klassenarbeiten

Die Klassen 8a, 8b und 8c haben eine Mathematikarbeit geschrieben. Von den Klassen 8a und 8b sind die Notenspiegel noch in der Schulkartei, von der Klasse 8c ist nur noch das Boxplot-Diagramm des Mathematiklehrers erhalten.

Note	1	2	3	4	5	6
Klasse 8a	-	4	6	5	3	2
Klasse 8b	3	6	10	5	7	1
Klasse 8c						

Klasse 8c:



a) Zeichne je ein Boxplot-Diagramm zu den Notenspiegeln der Klassen 8a und 8b.

b) Was kannst du anhand der Darstellung über die Mathematikleistungen sagen?

c) Welche der drei Klassen ist die beste Mathe-Klasse, welche die schlechteste? Begründe deine Antwort mathematisch (2 Gründe).

d) Leider ist der Notenspiegel der Klasse 8c verloren gegangen. Stelle einen möglichen Notenspiegel zusammen, der zu diesem Boxplot-Diagramm passt (die Klasse 8c hat 28 Schülerinnen und Schüler).

Maximum Spannweite Median Quartil Minimum

Rund um Boxplots

1 a) Zeichne ein Boxplot-Diagramm zu folgender Datenreihe:

8, 40, 32, 20, 15, 10, 7, 31, 7, 10, 10, 20, 14

b) Ergänze die Datenreihe so, dass sich der Median nicht ändert (vergrößert) [verkleinert]. Gib für jeden der drei Fälle zwei Möglichkeiten an.

2 Gib jeweils ein Beispiel einer Messreihe mit mindestens 6 Werten an, bei der

a) der Durchschnitt und der Median übereinstimmen.

b) der Durchschnitt nicht in der Box liegt.

c) das untere Quartil 4 ist und der Median den Wert 5 hat.

3 Ist es möglich, dass …

a) der Median nicht in der Box liegt?

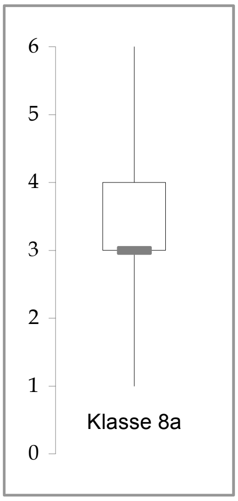
b) das Maximum und das obere Quartil übereinstimmen?

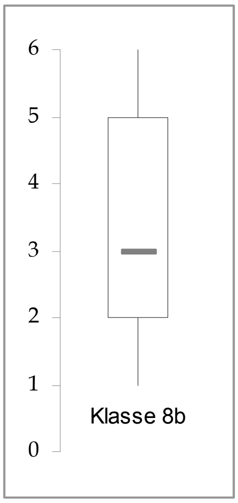
c) das untere Quartil und das obere Quartil gleich sind?

Beantworte jeweils mit Hilfe eines Beispiels oder einer Begründung!

Lösungshinweise zu den beiden Arbeitsblättern:

Klassenarbeiten





In der Klasse 8a gibt es eine gerade Anzahl von Daten, deshalb kann der Median 3 oder 4 sein.

Auch in der Klasse 8b gibt es eine gerade Anzahl von Daten, was sich aber nicht in unterschiedlichen Medianwerten bemerkbar macht.

zu a)

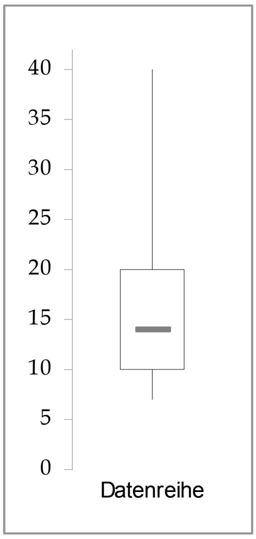
zu b) 8a: Die Box ist bei der Klasse 8a am kleinsten (zwischen 3 und 4), d. h., die Hälfte der Schülerinnen und Schüler haben eine 3 oder 4 geschrieben. 25 % haben eine 2 oder 3 und 25 % eine 4, 5 oder 6 geschrieben. Der Median liegt hier bei 4, d. h., dass die Hälfte der Schülerinnen und Schüler eine 4 oder eine schlechtere Note geschrieben haben.
8b: Die Spannweite der Noten ist hier am größten (von 1 bis 6). 25 % der Schülerinnen und Schüler haben eine 1 oder 2 geschrieben, 50 % haben eine Note zwischen 2 und 4 erzielt und 25 % eine 4, 5 oder 6 geschrieben. Der Median liegt bei 3, d. h., dass die Hälfte aller Schülerinnen und Schüler eine 3 oder eine bessere Note geschrieben hat.
8c: Auffällig ist hier die breite Box und die Übereinstimmung des Minimums mit dem unteren Quartil, d. h., dass 25 % der Schülerinnen und Schüler eine 1 geschrieben haben und die „mittleren" 50 % Noten zwischen 1 und 4 haben. Die schlechtesten 25 % haben eine 4 oder 5 geschrieben.
zu c) Die Lösung von Aufgabenteil c) ist nicht eindeutig, was im Rahmen einer veränderten, offenen Aufgabenkultur gewünscht wird und mit den Schülerinnen und Schülern besprochen werden soll. Als Entscheidungskriterien können z. B. der Durchschnitt, der Median oder das Minimum gewählt werden.
Mögliche Antworten wären: Die beste Klasse ist die 8b. Sie hat ein niedrigeres Minimum als die 8a und einen kleineren Median als die 8c. Die schlechteste Klasse ist die 8a, da bei ihr das Maximum höher als bei der 8c und der Median höher als in der 8b liegt.
zu d) Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Es müssen nur folgende Bedingungen erfüllt sein:
(i) 7 (= 28:4) Schülerinnen oder Schüler haben auf jeden Fall eine 1.
(ii) Die „mittleren" 14 Schüler haben Noten von 1 bis 4, wobei mindestens eine weitere 1 und eine 4 vorhanden sein muss.
(iii) Die sieben schlechtesten Schüler haben eine 4 oder eine 5 (die Note 6 kommt nicht vor).
(iv) Da der Median 3 beträgt, hat der 15. Schüler (in der geordneten Liste) eine 3 geschrieben, d. h., 14 Schüler haben eine 3 oder besser geschrieben.
Die geordnete Liste könnte z. B. so aussehen:

1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5

Rund um Boxplots*:*

1a) Die Daten müssen zuerst geordnet werden.

7	7	8	10	10	10	14	15	20	31	31	2	40



1b) Der Median beträgt 14.

Soll sich der Median nicht verändern, müssen gleich viele Daten ≤ 14 wie ≥ 14 ergänzt werden. Soll sich der Median vergrößern (verkleinern), ergänzt man mehr (weniger) Werte ≥ 14 als ≤ 14.

2a) z. B.: 1 1 [1 1 2 3 3] 3 3 , Durchschnitt = Median = 2

2b) z. B.: 1 1 [1 1 1] 1 6 , Durchschnitt ≈ 1,71 , die Box „reicht" von 1 bis 1.

2c) z. B.: 1 1 2 [4 4 4 5 5 5 7] 8 9 9

3a) Nein, denn die Box umfasst die mittleren 50 % der Werte

3b) Ja, Bsp.: 1 [1 1 2 2] 2 (Box in […])

3c) Ja, Bsp.: 1 2[2 2 2 2] 2 3

Die Box ist jeweils in […] dargestellt.

Abstrakte Fragen dieser Art können als Zusatz der Differenzierung dienen.

Die verschiedenen Lösungen der Schülerinnen und Schüler sollen im Unterricht diskutiert werden.

Es soll in der Diskussion problematisiert werden, welche Eigenschaften der Datenreihen durch Boxplots festgelegt sind und in welchen sie sich trotzdem noch unterscheiden können.

3. Stängel-Blatt-Diagramm:

Hier handelt es sich um eine weitere Darstellung, die häufig in Schulbüchern erklärt wird. Dieses Diagramm ist nach dem Lehrplan nicht vorgeschrieben, kann als zusätzliche Veranschaulichung aber eingesetzt werden.

Ein Stängel-Blatt-Diagramm verdeutlicht die absoluten Häufigkeiten grafisch besser als die beiden Datenlisten.

Am Beispiel der Sprungweite für die Klasse 8a (vergl. kurze Datenliste) kann man als „Stängel" die Zahl 4 wählen, da alle Sprungweiten 4, …. m betragen. Die „Blätter" sind die relevanten Nachkommastellen, d. h. die sich unterscheidenden Nachkommastellen einer Sprungweite (hier: die erste Nachkommastelle). Diese Ziffer wird so oft geschrieben, wie die Sprungweite vorgekommen ist.

4,3333333 bedeutet, dass die Sprungweite 4,3 m siebenmal aufgetreten ist. Das Stängel-Blatt-Diagramm kann als *vereinfachtes Balkendiagramm* verstanden werden und hat den Vorteil, dass es nicht gezeichnet werden muss.

Man erhält folgendes Stängel-Blatt-Diagramm für die Klasse 8a:

Sprungweite in m	d. h.
4,7	1 mal 4,7 m
4,	0 mal 4,6 m
4,5	1 mal 4,5 m
4,44	2 mal 4,4 m
4,3333333	7 mal 4,3 m
4,2222	4 mal 4,2 m
4,11111	5 mal 4,1 m
4,0	1 mal 4,0 m

Anmerkung:

Will man die Zahlen 2; 16; 49; 30; 4; 6; 18; 18; 19; 23; 41; 5; 9; 33; 44; 44 in einem Stängel-Blatt-Diagramm darstellen, so wählt man als Stängel die Zehnerstelle und fügt die Blätter (Einerstellen) der Größe nach geordnet an:

Stängel (Zehner)	**Blatt (Einer)**	**d. h.**
4	**1 4 4 9**	41, 44, 44, 49
3	**0 3**	30, 33
2	**3**	23
1	**6 8 8 9**	16, 18, 18, 19
0	**2 4 5 6 9**	2, 4, 5, 6, 9

3.2 Erhebung von Daten

Bevor man eine Datenerhebung etwa durch eine Umfrage durchführt, müssen das Thema festgelegt und folgende drei Fragen beantwortet werden. Am Unterrichtsbeispiel „Daten erheben durch eine Umfrage: Fernsehverhalten“ (ab Seite 88) wird dies ausführlich erläutert.

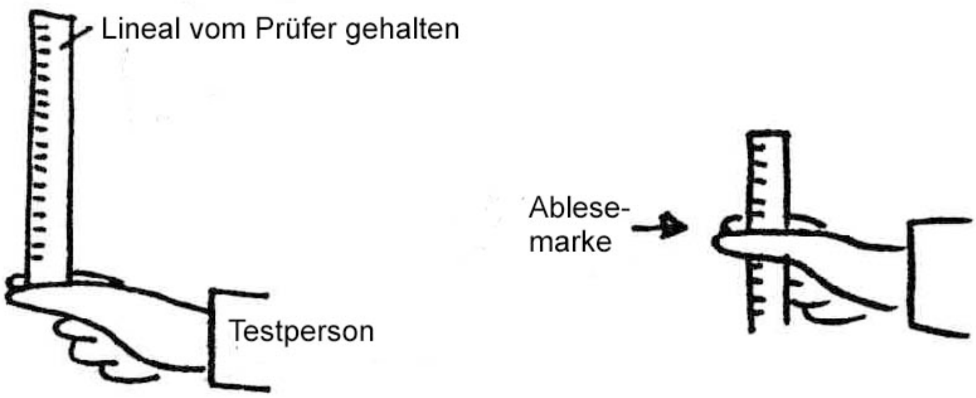
1. Was wollen wir testen? → Merkmal(e)
2. Über wen/was (allgemein) wollen wir etwas wissen? → Grundgesamtheit
3. Wen/was (speziell) befragen/testen wir? → Stichprobe

Anschließend werden die Daten gesammelt, geordnet, ausgewertet (z. B. grafisch, mit oder ohne Tabellenkalkulation) und interpretiert.

Daran können sich noch Prognosen anschließen, die im Rahmen dieser Veröffentlichung jedoch nicht behandelt werden.

Die Wahl der Grundgesamtheit (das ist die Menge der Personen, über die ich etwas wissen will) und vor allem aber die Wahl und die Größe der Stichprobe (das sind die tatsächlich befragten Personen) sind von großer Bedeutung für die Aussagekraft einer Statistik – und müssen mit der Klasse diskutiert werden!

Beispiel: Reaktionsvermögen testen



Wir testen das Reaktionsvermögen von Schülerinnen und Schülern und/oder von Lehrerinnen und Lehrern mit Hilfe eines Lineals. Dabei hält die Testperson ihre geöffnete Hand an das eine Ende des Lineals und greift nach dem Lineal, wenn der Prüfer es losgelassen hat. Die Daten werden unter folgenden Gesichtspunkten ausgewertet:

- männlich/weiblich (m/w)
- sportlich (j/n)
- Brillenträger (j/n)
- …

Je nachdem, welche Vermutungen die Schülerinnen und Schüler über eine Abhängigkeit der Reaktionszeit aufstellen, können und sollen noch weitere Merkmale aufgenommen werden. Die Grundgesamtheit sowie die Stichprobe richten sich zum einen nach dem Interesse der Schülerinnen und Schüler und zum anderen nach den Rahmenbedingungen.

Werden Messungen wie bei diesem Beispiel oder bei physikalischen Messreihen vorgenommen, sollte immer eine Analyse der Fehler erfolgen. Es bietet sich an, dies fachübergreifend mit den Naturwissenschaften zu unterrichten. Die ermittelten Werte können gut mit Hilfe von Boxplots ausgewertet werden.

> Die STIFTUNG WATRENTEST führt den Wettbewerb „Jugend testet" für Schülerinnen und Schüler durch. Informationen gibt es unter www.jugend-testet.de. Interessierte Lehrerinnen und Lehrer können auch einen Film zum Wettbewerb (DVD, ca. 8 Min.) bestellen (Tel.: 030-2631 23 45). Einen Überblick über Schulprojekte und kostenlose Unterrichtsmaterialien der STIFTUNG WARENTEST zur kritischen Verbraucherbildung findet man unter www.test.de/schule.

Eine 8. Klasse des Sebastian-Münster-Gymnasiums in Ingelheim hatte 1999 am Wettbewerb „Jugend testet" teilgenommen. Eine Gruppe von fünf Schülern testete „Tiefkühlpizzen im Alltag"[16]:

> „…Doch stimmt es wirklich, was die Hersteller auf ihren Packungen versprechen? Das wollten wir genauer wissen: Wir stellten ein Team aus Schülern zusammen, kauften bei verschiedenen Geschäften ein und deckten den Tisch. Eine Pizza nach der anderen musste sich den unvoreingenommenen Testern unterziehen. Die Pizzen wurden exakt nach der Anleitung auf der Packung gebacken, wobei teilweise noch gefrorene Exemplare aus dem Ofen kamen. Auch von dem versprochenen „Steinofen-Effekt" merkte man wenig… Keine Pizza hielt alles, was die Packung verspricht. Auch die Zeitangaben stimmten nicht immer, teilweise mussten die Pizzen 10 Minuten länger im Ofen bleiben, als vom Hersteller vorgesehen. Der Geschmack stimmte fast bei allen Produkten, …"

Die Testergebnisse im Überblick:

Salami-Pizzen

Hersteller	**Barconi (Aldi)**	**Wagner**	**Alberto**	**Ristorante**	**Erno**
Bezeichnung	**Edelsalami**	**Salami**	**Salami**	**Salame**	**Salami**
Mittlerer Preis (in DM)	1,79	3,79	3,33	3,79	2,59
Gewicht (in g)	350	300	380	320	350
Belag (siehe Legende)	4*	1*	1*	1*	1*
Durchmesser (gem.)	21 cm	25 cm	24 cm	25 cm	22 cm
Backzeit (in Min.)	12 bis 15	10 bis 12	10 bis 12	10 bis 12	12 bis 15
Backtemperatur (Umluft)	180°C	200°C	180°C	200°C	180°C
TESTURTEIL	**Sehr gut (9 P.)**	**Gut (8 P.)**	**Gut (7 P.)**	**Gut (7 P.)**	**Befriedigend (6 P.)**

[16] Die Schüler (ausschließlich Jungen) stuften die Pizzen auf einer Skala von 0 bis 10 Punkten ein.

Speziale-Pizzen

Hersteller	**Wagner**	**Ristorante**	**Riggano (Aldi)**	**Alberto**	**Erno**
Bezeichnung	**Speziale**	**Speciale**	**Speciale**	**Speziale**	**Speziale**
Mittlerer Preis (in DM)	3,79	3,79	2,59	3,33	2,59
Gewicht (in g)	350	330	350	380	350
Belag (siehe Legende)	3*	3*	3*	3*	3*
Durchmesser (gem.)	25 cm	25 cm	25 cm	24 cm	25 cm
Backzeit (in Min.)	10 bis 12	10 bis 12	10 bis 12	10 bis 12	10 bis 12
Backtemperatur (Umluft)	200°C	200°C	200°C	180°C	200°C
TESTURTEIL	**Gut (7P.)**	**Gut (7 P.)**	**Befriedigend (6 P.)**	**Befriedigend (6 P.)**	**Mangelhaft (2 P.)**

Pizzen mit Pilzen

Hersteller	**Ristorante**	**Erno**	**Alberto**
Bezeichnung	**Funghi**	**Champignon**	**Champignon**
Mittlerer Preis (in DM)	3,57	1,79	3,33
Gewicht (in g)	365	350	420
Belag (siehe Legende)	2*	2*	2*
Durchmesser (gem.)	25 cm	21 cm	24 cm
Backzeit (in Min.)	10 bis 12	12 bis 15	10 bis 12
Backtemperatur (Umluft)	200°C	180°C	180°C
TESTURTEIL	**Befriedigend (5 P.)**	**Ausreichend (3 P.)**	**Mangelhaft (2 P.)**

Legende:
1* = Salami, Käse
2* = Pilze, Käse
3* = Salami, Pilze, Käse, Schinken
4* = Salami, etwas Paprika, Käse

4 Aufgabenbeispiele – nicht nur für die Hauptschule

In den Bildungsstandards Mathematik für den mittleren Schulabschluss und den Hauptschulabschluss wird gefordert, dass Schülerinnen und Schüler bestimmte „allgemeine mathematische Kompetenzen“ erwerben wie z. B. Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren, Problemlösen. Bei der Umsetzung des BLK-Programms SINUS-Transfer hat es sich gezeigt, dass so genannte „offene Aufgaben“, verbunden mit entsprechenden Unterrichtsmethoden, geeignet sind, diese Ziele zu realisieren.

Merkmale offener Aufgaben (aus der Broschüre „Offene Aufgaben für die Hauptschule“)

- Die Aufgabenstellung enthält keine kleinschrittigen Fragen. Ausgangspunkt ist die Beschreibung einer Problemsituation.
- Die Aufgabe dient nicht dem kurzatmigen Einüben eines gerade behandelten Stoffs.
- Die Aufgabe kann auf verschiedenen Wegen gelöst werden. Sie lässt sich nicht eindeutig einem bestimmten trainierten Schema zuordnen.
- Die Aufgabe fordert die Schülerinnen und Schüler heraus, einen Lösungsweg selbst zu überlegen.
- Es gibt nicht nur *eine* richtige Lösung; die Aufgabenstellung lässt unterschiedliche Lösungen zu.
- Es ergibt sich die Notwendigkeit von Begründungen.
- Es ergibt sich die Notwendigkeit, die Bearbeitung der Aufgabe und die Lösung zu dokumentieren und für andere verständlich zu präsentieren.

In der Fachliteratur findet man eine Fülle guter Aufgabenbeispiele sowie anspruchsvolle und attraktive Unterrichtsmodelle, die jedoch für Hauptschulklassen häufig angepasst werden müssen.

An Hauptschulen wird oft fachfremd unterrichtet, manche Schülerinnen und Schüler verfügen nur über eine geringe Lesekompetenz und sind aus ganz unterschiedlichen Gründen kaum in der Lage, den Sinngehalt eines längeren Textes zu erfassen bzw. den Überblick zu behalten. Mit der Doppeldeutigkeit von Begriffen, mit Fremdwörtern und Fachtermini haben nicht nur Migranten große Probleme.

Von der Arbeitsgruppe „Sinus-Hauptschule“ wurde Lehrerinnen und Lehrern an Hauptschulen eine Sammlung erprobter, offener Aufgaben angeboten. Die in den zwei Heften „Offene Aufgaben für die Hauptschule“[17] veröffentlichten Aufgaben sind so konzipiert, dass die Lesekompetenz schrittweise weiterentwickelt werden kann und die Bearbeitungszeit 15 bis 20 Minuten nicht übersteigt. Bei den beschriebenen Aufgaben müssen nicht alle der oben genannten Merkmale erkennbar sein, damit sie als „offene Aufgabe“ anerkannt werden können.

---

[17] Unter der Adresse www.sinus.bildung-rp.de stehen die beiden Hefte „Offene Aufgaben für die Hauptschule“ in elektronischer Form zur Verfügung.

Die vorgestellten Aufgaben sind in fünf Bereiche eingeteilt, die sich vor allem im Textanteil und in den sprachlichen Anforderungen unterscheiden. Die Charakterisierung der einzelnen Bereiche und die zugehörigen Aufgaben zeigen einen Weg, wie schrittweise Lese- und Sprachkompetenz bei leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern entwickelt werden können. Ein nachhaltiger Erfolg beim Erwerb von allgemeinen mathematischen Kompetenzen wird sich jedoch nur dann einstellen, wenn „offene Aufgaben" regelmäßig in den laufenden Unterricht integriert werden.

Die Aufgabenbeispiele, die mit Hinweisen für den unterrichtlichen Einsatz versehen sind, sollen als Muster verstanden werden, nach dem Lehrkräfte selbst Aufgaben erstellen, die möglichst gut auf das Leistungsvermögen ihrer Klasse abgestimmt sind.

Beschreibung der fünf Aufgabenbereiche

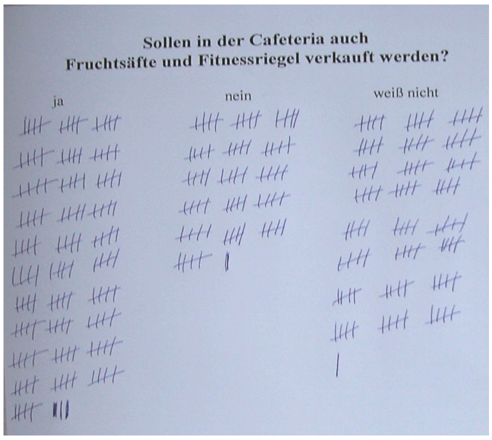
Bereich 1: Informationen aus Bildern

Mit den Aufgaben aus dem Bereich 1 werden Informationen statt aus Texten aus Bildergeschichten bzw. Bildcollagen entnommen. Wichtig bei diesem Aufgabentyp ist, dass sich aus dem Bild bzw. aus den aufeinander bezogenen Bildern eine Aufgabe ergibt, die Merkmale von offenen Aufgaben trägt.

Zur Schulung der Sprachkompetenz sollen die Schülerinnen und Schüler angehalten werden, den Inhalt der Bildergeschichte in Worte zu fassen (ggf. schriftlich), ihren Lösungsweg zu beschreiben und ihr Ergebnis zu begründen.

Fruchtsäfte und Fitnessriegel

Sollen in der Cafeteria auch Fruchtsäfte und Fitnessriegel verkauft werden?



Wie würdest du entscheiden?

a) Zeichne ein Diagramm zur Urliste und begründe deine Wahl.

b) Sollte das Cafeteria-Team Fruchtsäfte und Fitnessriegel ins Angebot aufnehmen? Eventuell kannst du einen Beitrag für die Schülerzeitung schreiben.

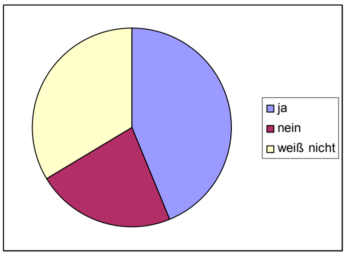
Hinweise zur Aufgabe

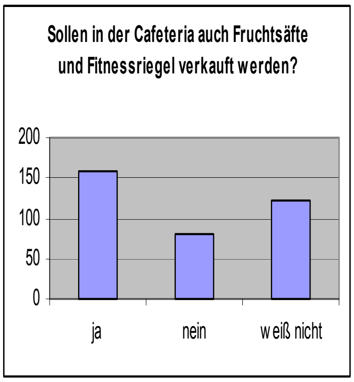
Titel, Bilder und Denk- bzw. Sprechblasen machen deutlich, dass in der Schule eine Umfrage zum Verkaufsangebot der Cafeteria durchgeführt wird und dass das Ergebnis der Umfrage in der Schülerzeitung veröffentlicht werden soll.

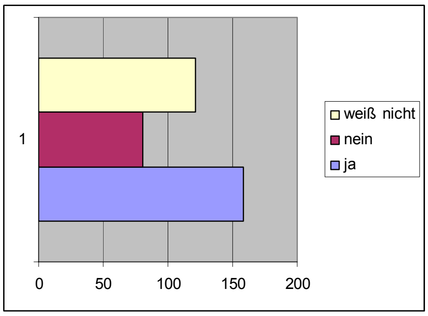
Die Schülerinnen und Schüler sollen Vor- und Nachteile eines Diagrammtyps abwägen und sich für eine Darstellung entscheiden. Die Aufgabe kann in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit (auch im Rahmen von Stationen- bzw. Wochenplanarbeit) gelöst werden. Dabei soll es den Schülerinnen und Schülern überlassen werden, welche Lösungsidee sie bevorzugen. In jedem Fall sollten sie diese dokumentieren und ihren Lösungsweg erklären können. In diesem Zusammenhang ist auch der zweite Teil der Aufgabe von Bedeutung, denn es geht darum, das Ergebnis auszuwerten, Schlussfolgerungen zu ziehen und diese auch zu begründen.

Mögliche Lösungen

Die Zahlen sind so gewählt, dass auch ein Kreisdiagramm leicht gezeichnet werden kann. Selbstverständlich kann das Schaubild auch mit einer Tabellenkalkulation erstellt werden.







Hinweis zur Erweiterung der Aufgabe

In leistungsstarken Lerngruppen können die Schüler dazu angeregt werden, mehrere Schaubilder anzufertigen und vergleichende Überlegungen anzustellen.

Bereich 2: Informationen aus bildunterstütztem Text

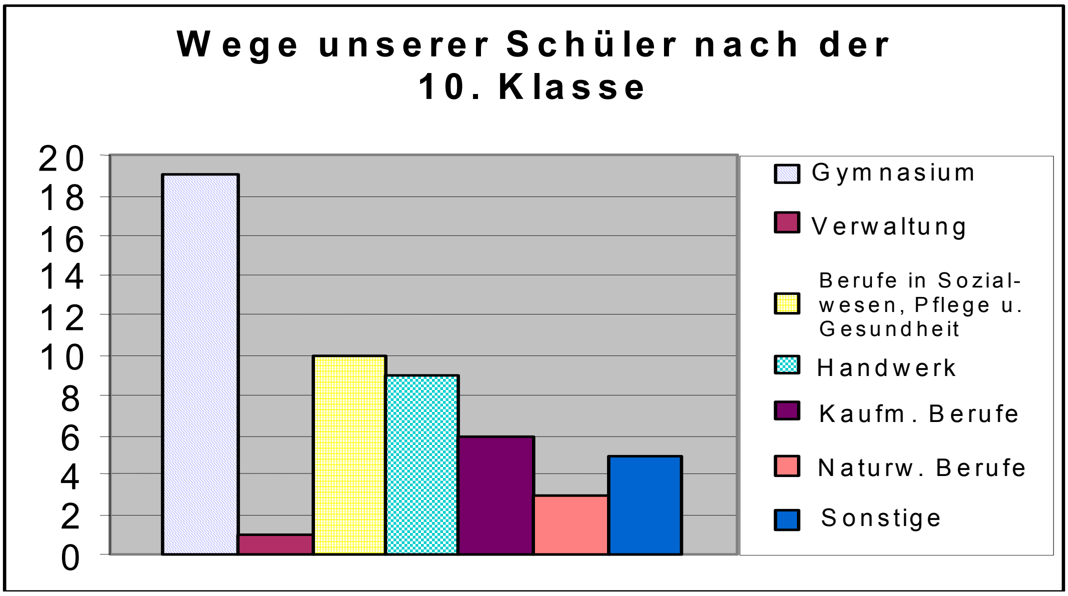
Um die Schülerinnen und Schüler schrittweise zu sinnentnehmendem Lesen auch umfangreicherer Texte zu führen, wird bei den Aufgaben des Bereichs 2 ein Teil der zur Bearbeitung der Aufgabe notwendigen Informationen durch Text vermittelt, ein anderer Teil durch Bilder.

Die Bilder dienen nicht der schmückenden Illustrierung des Texts, sondern der Übermittlung von Informationen. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgabe lässt sich verändern, indem weitere Textteile durch Bilder ersetzt werden oder umgekehrt.

Auch bei diesen Aufgaben muss Wert darauf gelegt werden, dass die Schülerinnen und Schüler ihren Lösungsweg beschreiben und ihr Ergebnis erklären und begründen.

Schulabgänger

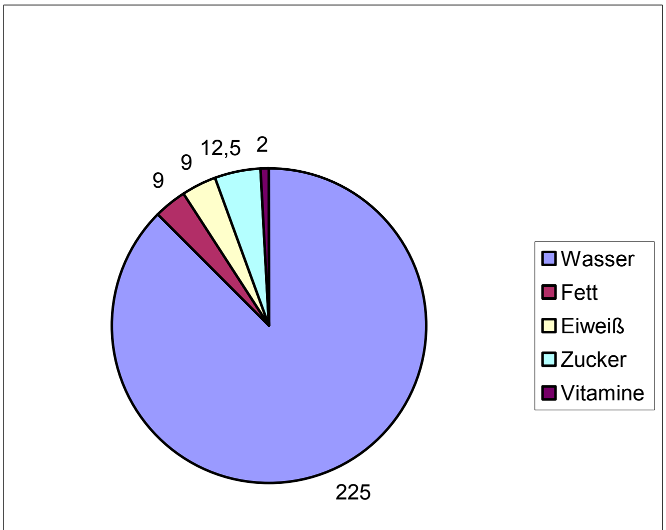
Welche der folgenden Texte passen zum Diagramm?



Entscheide bei jeder Aussage, ob sie richtig oder falsch ist. Beschreibe, warum du so entschieden hast.

a) 9 Absolventen entschieden sich für einen handwerklichen Beruf.
b) Insgesamt 19 Schülerinnen und Schüler besuchten die 10. Klasse.
c) Das 10. Schuljahr wurde von 53 Schülerinnen und Schülern besucht.
d) Die Mehrzahl der Schülerinnen und Schüler besuchen nach der 10. Klasse ein Gymnasium.
e) Die Schule hat sieben 10. Klassen.
f) Ungefähr ein Drittel der Abgänger besucht nach der 10. Klasse ein Gymnasium.

Milch ist gesund



Bestandteile der Milch (Angaben in Gramm)

Nährstoffe

Die vom Körper verwertbaren Nährstoffe unterscheiden sich stark in ihrem Energiegehalt:

1 g Eiweiß: 17 KJ / 4 kcal

1 g Zucker: 17 KJ / 4 kcal

1 g Fett: 37 KJ / 9 kcal

1 g Alkohol: 29 KJ / 7 kcal

1 g Vitamine: 0 KJ / 0 kcal

Anna achtet auf ihre Linie und zählt Kalorien. Weil Milch aber gesund ist, trinkt sie täglich etwa $\frac{1}{4}$ Liter. Wie viele Kalorien sind das?

Anmerkung zum Aufgabentyp:

Ein Ziel dieses Aufgabentyps ist die Verbesserung des Textverständnisses. Die Aussagen sind kurz, die Diktion nicht anspruchsvoll. Dies erleichtert Schülerinnen und Schülern mit wenig ausgeprägtem Sprachvermögen die inhaltliche Erschließung des Textes. Weiterhin bietet dieser Aufgabentyp den Lernenden Formulierungshilfen für die Interpretation von Diagrammen an.

Die vorgegebene Aufgabe „Schulabgänger“ soll als Anregung verstanden werden, nach der Lehrkräfte selbst Aufgaben entwickeln können, die auf das Leistungsvermögen ihrer Lerngruppen bzw. auf regionale Bedingungen abgestimmt sind.

Das vorgegebene Diagramm aus dem Erfahrungsbereich der Schülerinnen und Schüler kann sowohl in einer Unterrichtseinheit „Erstellen und Interpretieren von Diagrammen“ oder im Rahmen des „Sicherns von Grundwissen“ eingesetzt werden. Man kann auch darüber reden, dass und warum hier falsch interpretiert werden kann. So könnte beim Betrachten z. B. der Eindruck entstehen, dass fast alle Absolventinnen und Absolventen das Gymnasium besuchen.

Lösung zu **„Schulabgänger“**
Die Aussagen a, c und f sind richtig.

Lösung zu **„Milch ist gesund“**
Fett, Eiweiß und Zucker liefern die Kalorien:

$$9 \cdot 37 + 9 \cdot 17 + 12{,}5 \cdot 17 = 698{,}5\ kJ\ \ oder\ \ 9 \cdot 9 + 9 \cdot 4 + 12{,}5 \cdot 4 = 144\ kcal$$

Bereich 3: Vorgegebene Texte und Rechenaufgaben (Ergebnisse) einander zuordnen

Von Bereich zu Bereich steigt der Anspruch an das Textverständnis. Die Texte der Aufgaben sind kurz und leicht zu verstehen, die Rechenaufgaben einfach. Die Texte enthalten die gleichen Zahlen wie die Rechenaufgabe. Die Schülerinnen und Schüler sollen herausfinden und begründen, welche Texte zur Aufgabe (Ergebnis) passen. Auf welchem Weg die richtigen Zuordnungen gefunden werden, ist offen.

Tag des Spiels in der Gutenberg-Schule

a) Franzi und Ina spielen ‚Mensch ärgere dich nicht'. Wenn Ina eine 5 oder eine 3 wirft, kann sie einen Spielstein von Franzi aus dem Spiel werfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim nächsten Wurf eine 5 oder eine 3 oben liegt?

b) Für den Tag des Spiels hat die Klasse 8a ein Glücksrad gebaut und die 10 gleich großen Felder mit den Zahlen 1 bis 10 beschriftet. Bei allen geraden Zahlen und der 1 erhält man einen Preis. Max dreht einmal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er gewinnt?

c) Die Klasse 9 b hat genauso ein Glücksrad gebaut wie die Klasse 8a. Doch hier gewinnt man immer dann, wenn das Rad bei einer Primzahl stehen bleibt.

d) An einer Losbude findet man folgendes Schild: Bei 100 Losen gibt es nur 40 Nieten!

e) In der 5c kann man gewinnen, wenn man ohne hinzuschauen aus einem Gefäß eine rote Kugel greift. In dem Gefäß befinden sich 5 blaue und 3 rote Kugeln. Mergime zieht einmal. Wie groß ist ihre Chance auf einen Gewinn?

Wo ist die Gewinnwahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$?

Lösung zu „Tag des Spiels in der Gutenberg-Schule“

Bei den Aufgaben b und d ist $p = \frac{3}{5}$

Die Rechnung ist bei den Aufgaben zur Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht umfangreich, die Ergebnisse können – eventuell nach Kürzen der Bruchzahl – zugeordnet werden.

Bereich 4: Zu einer Rechenaufgabe einen passenden Text erfinden

Im Gegensatz zu Bereich 3, in dem Texte vorgegeben sind, sollen die Schülerinnen und Schüler jetzt selbst Texte formulieren. Bei den Leistungsschwächsten könnte man sich damit begnügen, wenn sie – ohne Kontextbezug – die Rechenschritte nur beschreiben. Je mehr Grundrechenarten in der vorgegebenen Aufgabe auftreten, desto schwieriger wird es, einen passenden Text zu formulieren.

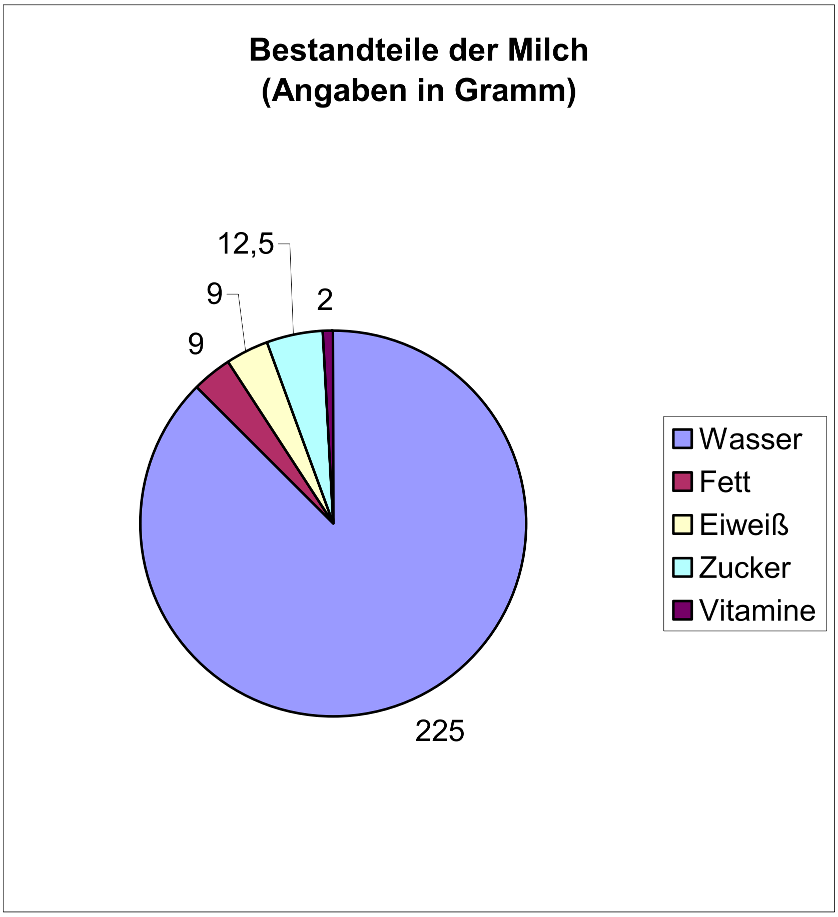
Durch diese Art von Aufgaben soll nicht nur die Sprachkompetenz der Schülerinnen und Schüler verbessert werden, vielmehr regen die Aufgaben auch die Kreativität an. Jede Schülergruppe kann sich einen eigenen Sachverhalt ausdenken.

Wandertour

Ergänze den folgenden Text so, dass er zur Rechenaufgabe passt.

Hatice, Oliver und Merle machten in den Sommerferien gemeinsam eine viertägige Wandertour. …….	$\frac{15+24+18+20}{4}$

Kalorien in der Milch



Nährstoffe

Die vom Körper verwertbaren Nährstoffe unterscheiden sich stark in ihrem Energiegehalt:

1 g Eiweiß liefert 4 kcal.

1 g Zucker liefert ebenfalls 4 kcal, wogegen bei 1 g Fett 9 kcal frei werden.

Vitamine und Mineralstoffe haben keine Kalorien.

Lösung zu „Wandertour“

Bei dieser Aufgabe kann die Bedeutung des Mittelwertes thematisiert werden.

Ein möglicher Aufgabentext: Hatice, Oliver und Merle machten in den Sommerferien gemeinsam eine viertägige Wandertour. Die einzelnen Etappen betragen 15 km, 24 km, 18 km und am letzten Tag 20 km. Welchen Weg haben sie im Durchschnitt täglich zurückgelegt?

Täglich wurden im Durchschnitt 19,25 km zurückgelegt.

Lösung zu „Kalorien in der Milch“

Bei der Aufgabe handelt es sich um die Umkehrung von *Milch ist gesund.* Eine mögliche Lösung ist deshalb der Text*:* Anna achtet auch auf ihre Linie und zählt Kalorien. Weil Milch aber gesund ist, trinkt sie täglich etwa $\frac{1}{4}$ Liter. Wie viele Kalorien sind das?

Bereich 5: Zu einem Text Fragen formulieren, die zu einer Rechenaufgabe führen

Hier wird im Gegensatz zu Bereich 4 der Sachverhalt vorgegeben, aber keine Frage gestellt. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich überlegen, was interessieren könnte und selbst (mindestens) eine Frage formulieren. Durch die Frage wird der Text zur Aufgabe, die anschließend gelöst wird.

In Lehrbüchern findet man Aufgaben, bei denen man durch Weglassen der Frage(n) solche Aufgaben erzeugen kann. Man sollte aber bei der Auswahl einer solchen Aufgabe darauf achten, dass die Texte, die den Sachverhalt beschreiben, kurz sind, der Sachverhalt selbst leicht durchschaut werden kann und die Anzahl der angegebenen Größen klein ist. Ferner sollte der beschriebene Sachverhalt nicht nur eine einzige Fragestellung ermöglichen.

Achtung Fehler!

Achtung! In dem Text steckt ein Fehler!

Aus einem Zeitungsbericht:

Bei den Geschwindigkeitskontrollen, die im Januar durchgeführt wurden, fuhr jeder vierte Autofahrer zu schnell. Das sind zwar weniger Raser als im Dezember geblitzt wurden, doch auch 40 % sind zu viele. Die Polizei wird auch weiterhin Geschwindigkeitskontrollen durchführen.

Formuliere eine Frage, die den Fehler aufdecken hilft. Führe dazu die Rechnung durch.

Hinweise zur Aufgabe „Achtung Fehler!“:

- Aufgaben dieser Art fördern Konzentration und das texterschließende Lesen.
- Die Aufgabe kann den Schülerinnen und Schülern auch ohne den Hinweis auf den Fehler vorgelegt werden. Dies erhöht den Schwierigkeitsgrad.

Lösung zu „Achtung Fehler!“

Entspricht $\frac{1}{4}$ wirklich 40 %? Nein, denn $\frac{1}{4}$ = 25 %.